Contenido

Capítulo 9

Ecuación de ondas unidimensional

9.1 Deducción de la ecuación de ondas

Suponemos que una cuerda flexible se tensa entre dos puntos del eje x, digamos $x = 0$ y $x = l$. La cuerda se deforma a una cierta curva $u = f(x)$ en el plano xu y luego se suelta.

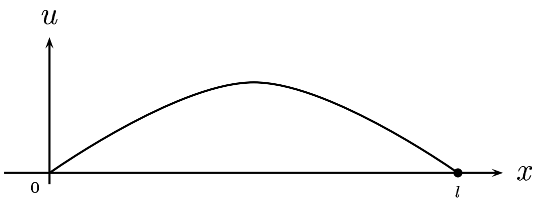

Figura 1

Problema: Determinar la curva $u(x,t)$ en que se deforma la cuerda en un instante t posterior.

Hipótesis Adicionales:

- La vibración subsiguiente es transversal; es decir cada punto de la cuerda tiene coordenada x constante; de modo que su coordenada u depende solo de x y del tiempo. De esta forma el desplazamiento de la cuerda a partir de su posición de equilibrio viene dado por cierta función $u = u(x,t)$ y sus derivadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad : \quad \text{velocidad de la cuerda}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad : \quad \text{aceleración de la cuerda}$$

Consideremos el movimiento de un pequeño fragmento de cuerda de longitud $\triangle x$. Si la densidad de masa lineal es $m = m(x)$, la masa de este fragmento es $m \triangle x$, y la segunda Ley de Newton dice que la fuerza transversal F que actúa sobre él es

$$F = m \triangle x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \tag{9.1}$$

Como la cuerda es flexible, la tensión $T = T(x)$ en cualquier punto está dirigida a lo largo de la tangente y tiene componente igual a $T \operatorname{sen}(\theta)$.

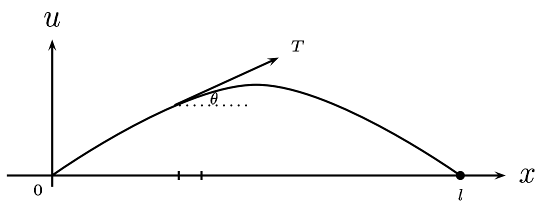

Figura 2

- Suponemos que el movimiento de la cuerda se debe solo a la tensión. Luego F es la diferencia entre los valores de $T \operatorname{sen}(\theta)$ en los extremos del fragmento, es decir, $F = \triangle(T \operatorname{sen}(\theta))$. As (9.1) queda de la forma:

$$\triangle(T \operatorname{sen}(\theta)) = m \triangle x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \tag{9.2}$$

Si las vibraciones son relativamente pequeñas, de modo que θ es pequeño, $\operatorname{sen}(\theta)$ es aproximadamente igual a $\tan(\theta) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Reemplazando esto en (9.2) obtenemos:

$$\frac{\triangle(T \frac{\partial u}{\partial x})}{\triangle x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.3}$$

y haciendo $\triangle x \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \tag{9.4}$$

- Asumimos que m y T son constantes, obteniéndose

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

que es la ecuación de ondas unidimensional.

Buscamos una solución $u(x,t)$ que satisfaga las condiciones de frontera

$$u(0,t) \;=\; 0\,, \quad u(l,t) \;=\; 0 \qquad \text{(extremos fijos)}$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) \;=\; f(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \;=\; g(x)\,.$$

Observe que si $g(x) \equiv 0$, entonces la cuerda está en reposo al momento de soltarla y su forma viene dada por el gráfico de la función $y = f(x)$.

De esta forma nuestro problema es:

$$\begin{cases} u_{tt} \;=\; c^2\, u_{xx} & 0 \le x \le l & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) \;=\; f(x) & u_t(x,0) \;=\; g(x) & 0 \le x \le l \\ u(0,t) \;=\; u(l,t) \;=\; 0 & & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{9.5}$$

9.2 Fórmula de d'Alembert

Proposición 9.2.1 Sean $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes y dos veces derivables. Entonces cualquier función de la forma

$$u(x,t) \;=\; \alpha[F(x+ct) \;+\; F(x-ct)] \;+\; \frac{\beta}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau$$

verifica la ecuación

$$u_{tt} \;=\; c^2\, u_{xx}\,.$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}
u_t &= \alpha[F'(x+ct)\cdot c - F'(x-ct)\cdot c] + \frac{\beta}{c}[G(x+ct)\cdot c + G(x-ct)\cdot c] \\
u_{tt} &= \alpha c^2[F''(x+ct) + F''(x-ct)] + \beta c^2\frac{1}{c}[G'(x+ct) - G'(x-ct)] \\
u_x &= \alpha[F'(x+ct) + F'(x-ct)] + \frac{\beta}{c}[G(x+ct) - G(x-ct)] \\
u_{xx} &= \alpha[F''(x+ct) + F''(x-ct)] + \frac{\beta}{c}[G'(x+ct) - G'(x-ct)]
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Proposición 9.2.2 Sean $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes y dos veces derivables. Entonces cualquier función de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau$$

con $F(x) = f(x)$ *y* $G(x) = g(x)$, *para* $0 \le x \le l$ verifica

$$\begin{cases} u_{tt} & = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) & = f(x)\,,\ u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Demostración. En efecto, para $0 \le x \le l$, se tiene

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] + 0 = F(x) = f(x)\,. \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{2}[F'(x+ct)\cdot c - F'(x-ct)\cdot c]/_{t=0} + \\ & \quad \frac{1}{2c}[G(x+ct)\cdot c + G(x-ct)\cdot c]/_{t=0} \\ &= 0 + \frac{1}{2}[G(x) + G(x)] = G(x) = g(x)\,. \end{aligned}$$

9.2.1 Funciones pares, impares y periódicas

Recordemos que una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **impar** (resp. **par**) si $F(-x) = -F(x)$ (resp. $F(-x) = F(x)$) para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **periódica** de periodo T, si T es el menor número positivo que verifica $F(x+T) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observaciones 9.2.3 Los siguientes resultados son inmediatos.

1. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces que F sea impar (resp. par) implica que F' es par (resp. impar).

2. Para definir una función periódica de periodo $2T$, digamos F, basta definirla en el intervalo $[-T, T]$ y especificar que verifica $F(x+2T) = F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Suponga que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de periodo $2T$. Entonces

$$\begin{aligned} F(-x) &= -F(x) \quad \forall\, x \in [-T, T] \implies F \quad \text{es impar}\,, \\ F(-x) &= F(x) \quad \forall\, x \in [-T, T] \implies F \quad \text{es par}\,. \end{aligned}$$

Definición 9.2.4 *Una función* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice impar (resp. par) en* k *si la función trasladada en* k

$$\widetilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \widetilde{F}(x) = F(x + k)\,,$$

es impar (resp. par)

Luego $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar (resp. par) en k si

$$F(-x + k) = -F(x + k) \quad (\text{resp. } \; F(-x + k) = F(x + k)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Observación 9.2.5 Si F es impar (resp. par) y periódica de periodo $2l$, entonces F también es impar (resp. par) en l.

En efecto, en el caso impar

$$F(-x + l) \;=\; F(-x + l - 2l) \;=\; F(-x - l) \;=\; -F(x + l)\,,$$

y en el caso par

$$F(-x + l) \;=\; F(-x + l - 2l) \;=\; F(-x - l) \;=\; F(x + l)\,.$$

9.2.2 Problema de ondas homogéneo con extremos fijos

Consideremos el problema (9.5). Teniendo en cuenta las proposiciones (9.2.1) y (9.2.2), debemos considerar funciones $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas por partes y dos veces diferenciables, que verifiquen $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$ para todo $0 \leq x \leq l$. El siguiente paso es imponer condiciones adicionales a estas funciones de modo que si

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(x + ct) \;+\; F(x - ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau\,,$$

también se verifiquen las condiciones de frontera $u(0,t) = u(l,t) = 0$ para todo $t > 0$.

Afirmación. Esta condiciones se verifican si F y G son funciones impares y periódicas de periodo $2l$.

En efecto, en este caso

$$u(0,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(ct) \;+\; F(-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(\tau)d\tau \;=\; 0\,,$$

y

$$\begin{aligned} u(l,t) \;&=\; \frac{1}{2}[F(l + ct) \;+\; F(l - ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{l-ct}^{l+ct} G(\tau)d\tau \\ &=\; \frac{1}{2}[F(l + ct) \;+\; F(-l - ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(s + l)ds \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

ya que la función $h(s) = G(s + l)$ también es impar $(h(-s) = G(-s + l) = G(-s - l) = -G(s + l) = -h(s))$.

Definición 9.2.6 *Dada* $h : [0,l] \to \mathbb{R}$ *continua por partes, se llama* **extensión impar de periodo** $2l$, *de* h, *a la función periódica de periodo* $2l$ $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$h_i(x) = \begin{cases} h(x) & si \quad 0 < x < l \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \\ \\ -h(-x) & si \quad -l < x < 0 \end{cases}$$

y

$$h_i(x+2l) \;=\; h_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma la función

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_i(x+ct) \;+\; f_i(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_i(\tau)d\tau$$

es solución del problema de ondas homogéneo con fronteras fijas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 \leq x \leq l t \in \mathbb{R}^+ & \\ \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq l \\ \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & & t > 0\,. \end{cases}$$

donde f_i y g_i son las extensiones impares de periodo $2l$ de f y g respectivamente.

Ejemplo 9.2.7 Considere una cuerda de longitud π, fija por sus extremos, que parte del resposo con un perfil inicial dado por la función $f(x) = x^2$. Obtener la forma de la cuerda en el instante t.

Nuestra ecuación es

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, & 0 \leq x \leq \pi\,, & t \in \mathbb{R}^+\,, \\ u(x,0) = x^2\,, & u_t(x,0) = 0\,, & 0 \leq x \leq \pi\,, \\ u(0,t) = 0\,, & u(\pi,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R}^+\,, \end{cases}$$

Entonces

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_i(x+ct) \;+\; f_i(x-ct)\right]$$

donde $f_i(x)$ es la extensión impar de período 2π de $f(x) = x^2$. Es decir

$$f_i(x) \;=\; \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi\,, \end{cases}$$

y

$$f_i(x+2\pi) \;=\; f_i(x)\,.$$

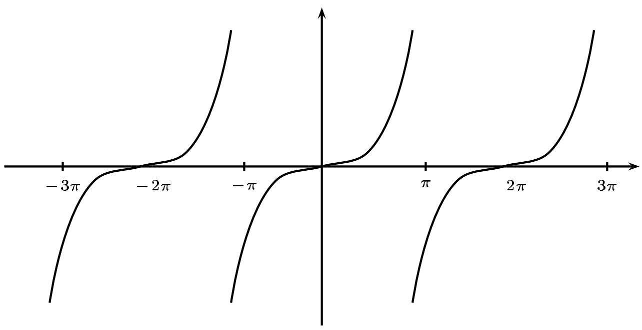

Figura 3

Por ejemplo si $c=1$

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{3\pi}{2},\frac{17\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\left[f_i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{17\pi}{3}\right)+f_i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{17\pi}{3}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[f_i\left(\frac{43\pi}{6}\right)+f_i\left(\frac{-25\pi}{6}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[f_i\left(-\pi+\frac{1}{6}\pi\right)+f_i\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)^2-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\right] \;=\; -\frac{13\pi^2}{36}\,.
\end{aligned}$$

9.2.3 Problema de ondas homogéneo con extremos libres

Corresponde a la ecuación

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx}\,, \quad 0<x<l\,, \quad t\in\mathbb{R}^+ && (9.6)\\
u(x,0) &= f(x)\,, \quad u_t(x,0)=g(x)\,, \quad 0<x<l && (9.7)\\
u_x(0,t) &= u_x(l,t)=0 \qquad t\in\mathbb{R}^+ && (9.8)
\end{aligned}$$

Como sabemos cualquier función de la forma

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[F(x+ct)\;+\;F(x-ct)\right]\;+\;\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau$$

con

$$F(x) \;=\; f(x)\,, \qquad G(x) \;=\; g(x)\,, \quad \forall\, 0<x<l$$

es solución de la ecuación (9.6) y verifica las condiciones iniciales (9.7).

Observe que como

$$u_x(0,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[F'(ct) \;+\; F'(-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\left[G(ct) \;-\; G(-ct)\right] \;,$$

si F' es impar y G es par, obtenemos $u_x(0,t) = 0$.

Por otra parte como

$$u_x(l,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[F'(l+ct) \;+\; F'(l-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\left[G(l+ct) \;-\; G(l-ct)\right] \;,$$

obtenemos $u_x(l,t) = 0$, si además F' y G son periódicas de periodo $2l$.

Luego necesitamos $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$F/[0,l] = f \;, \quad G/[0,l] = g \;,$$

que las funciones $F/[-l,l]$ y $G/[-l,l]$ sean pares, y que

$$F(x+2l) \;=\; F(x)\,, \quad G(x+2l) \;=\; G(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Definición 9.2.8 *Dada* $h : [0,l] \to \mathbb{R}$ *continua por partes, se llama* **extensión par de periodo** $2l$, *de* h, *a la función periódica de periodo* $2l$ $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$h_i(x) = \begin{cases} h(x) & si \;\; 0 < x < l \\ \\ h(-x) & si \;\; -l < x < 0 \end{cases}$$

y

$$h_i(x+2l) \;=\; h_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma F y G deben ser las extensiones pares de periodo $2l$ de f y g respectivamente.

Así la solución de (9.6) que verifica las condiciones iniciales (9.7) y las condiciones de frontera (9.8) es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_p(x+ct) \;+\; f_p(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_p(t)dt\,,$$

donde f_p y g_p son las extensiones pares de periodo $2l$ de f y g respectivamente.

9.2.4 Problema de ondas homogéneo con extremos semilibres

Corresponde a la ecuación

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ & \end{array}$$

Consideramos como antes una función del tipo

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\,[F(x+ct) \;+\; (x-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(t)dt\;,$$

con $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$, para todo $0 \leq x \leq l$.

Examinemos primero las condiciones iniciales. Debemos tener

$$u(0,t) \;=\; \frac{1}{2}\,[F(ct) \;+\; F(-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(t)dt \;=\; 0\,.$$

Para que esto se cumpla es suficiente que las funciones F y G sean impares. También

$$u_x(l,t) \;=\; \frac{1}{2}\,[F'(l+ct) \;+\; F'(l-ct)] \;+\; \frac{1}{2}\,[G(l+ct) \;-\; G(l-ct)] \;=\; 0\,.$$

Observe que esto se verifica si $F'(l-ct) = -F'(l+ct)$ y $G(l-ct) = G(l+ct)$. Esto se logra si F' es impar en l y G es par en l.

Luego debemos pedir que F y G sean impares (en cero) y que sean pares en l.

Definición 9.2.9 *Dada* $h : [0,l] \to \mathbb{R}$ *continua por partes, se llama* **extensión impar en** 0 **y par en** l **de periodo** $4l$ *de* h*, a la función periódica de periodo* $4l$ $h_{ip} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$h_{ip}(x) = \begin{cases} h(2l-x) & \quad l \leq x \leq 2l \\[2ex] h(x) & si \;\; 0 < x \leq l \\[2ex] 0 & si \;\; x = 0 \\[2ex] -h(-x) & si \;\; -l < x < 0 \\[2ex] -h(2l+x) & \quad -2l \leq x \leq -l \end{cases}$$

y

$$h_{ip}(x+4l) \;=\; h_{ip}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Afirmación 1. h_{ip} es impar.
Demostración. Claramente la función h_{ip} es impar en $[-l,l]$.

Sea $x \in$ [l, 2l]. Entonces $-x \in$ [-2l, -l] y

$$h_{ip}(-x) \;=\; -h(2l-x) \;=\; -h_{ip}(x)\,.$$

Similarmente si $x \in$ [-2l, -l], tenemos $-x \in$ [l, 2l], y

$$h_{ip}(-x) \;=\; h(2l+x) \;=\; -h_{ip}(x)\,.$$

Afirmación 2. h_{ip} es par en l.
Demostración. Tenemos que demostrar que $h_{ip}(-x+l) = h_{ip}(x+l)$.
Si $x \in$ [0, l], entonces $-x+l \in$ [0, l] y $x+l \in$ [l, 2 l]. Luego

$$h_{ip}(-x+l) = h(-x+l)\,, \quad \text{y} \qquad h_{ip}(x+l) = h(2l-x-l) = h(l-x)\,.$$

Por lo tanto $h_{ip}(-x+l) = h_{ip}(x+l)$ para $0 \le x \le l$.
Si $x \in$ [-l, 0], entonces $-x+l \in$ [l, 2l] y $x+l \in$ [0, l]. Luego

$$h_{ip}(-x+l) = h(2l-(-x+l)) = h(l+x)\,, \quad \text{y} \qquad h_{ip}(x+l) = h(x+l)\,.$$

Así $h_{ip}(-x+l) = h_{ip}(x+l)$ para $-l \le x \le 0$.
Para $x \in$ [l, 2l], tenemos $-x+l \in$ [-l, 0] y $x-3l \in$ [-2 l, -l]. Entonces

$$h_{ip}(-x+l) = -h(x-l)\,, \quad \text{y}$$

$$h_{ip}(x+l) = h_{ip}(x+l-4l) = h_{ip}(x-3l) = -h(2l+x-3l) = h(x-l)\,.$$

Luego $h_{ip}(-x+l) = h_{ip}(x+l)$ para $l \le x \le 2l$.
Finalmente si $x \in$ [-2 l, -l], entonces $-x-3l \in$ [-2 l, -l] y $x+l \in$ [-l, 0]. Por lo tanto

$$h_{ip}(-x+l) = h_{ip}(-x+l-4l) = h_{ip}(-x-3l) = -h(2l+(-x-3l)) = -h(-x-l)$$

$$\text{y} \qquad h_{ip}(x+l) = -h(-x-l)\,.$$

De esta forma también $h_{ip}(-x+l) = h_{ip}(x+l)$ para $-2l \le x \le -l$.
Luego F y G deben ser las extensiones impares en 0 y pares en l de periodo $4l$ de f y g respectivamente.
Así la solución del problema de ondas homogéneo con frontera semi-libre es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f_{ip}(x+ct) + f_{ip}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_{ip}(\tau)d\tau\,,$$

donde f_{ip} y g_{ip} son las extensiones impares en 0 y pares en l de periodo $4l$ de f y g respectivamente.

Ejemplo 9.2.10 Encuentre la solución del problema de ondas

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, & & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = sen(x)\,, & u_t(x,0) = 1\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0\,, & & t > 0\,. \end{array}$$

Tenemos

$$f(x) = \text{sen}(x)\,, \qquad g(x) = 1\,,$$

y por lo tanto, la solución es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_{pi}(x+ct) \;+\; f_{pi}(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_{pi}(\tau)d\tau\,,$$

donde f_{pi} y g_{pi}, son las extensiones pares en 0 e impares en $\frac{\pi}{2}$ de período 2π de las funciones $\operatorname{sen}(x)/[0,\frac{\pi}{2}]$ y $1/[0,\frac{\pi}{2}]$, respectivamente.

Observación 9.2.11 En el caso de fronteras fijas:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} \;=\; c^2 u_{xx}\,, & 0 \le x \le l\,,\quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) \;=\; f(x)\,,\quad u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0\,, & t > 0\,, \end{array}$$

encontramos la solución

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_i(x+ct) \;+\; f_i(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_i(\tau)d\tau\,,$$

donde f_i, g_i son las extensiones impares de periodo $2l$ de f y g, respectivamente.

Los desarrollos en serie de Fourier de f_i y g_i son:

$$f_i(x) \sim \sum_{u=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad \text{con} \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right)ds$$

$$g_i(x) \sim \sum_{u=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad \text{con} \qquad B_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right)ds\,.$$

Reemplazando las funciones f_i y g_i, por sus respectivas series de Fourier tenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) \;+\; \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right] \;+ \\ &\quad + \frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\tau}{l}\right)d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \;- \\ &\quad \frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_l^{n\pi}\left[\;\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) \;-\; \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \;+ \\ &\quad \frac{l}{cn\pi}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \, \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \;+\; \tilde{B}_n \; sen \left(\frac{n\pi c}{l} t\right)\right] \, sen \left(\frac{n\pi}{l} x\right) \,.$$

Cada término de esta serie puede considerarse como una onda estacionaria. Por ejemplo:
Para $n = 1$, $\quad \left[b_1 \, \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \;+\; \tilde{B}_1 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi c}{l} t\right)\right] \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right)$
es una onda senoidal (sen $\left(\frac{\pi}{l}x\right)$) multiplicada por una amplitud que varia con el tiempo.

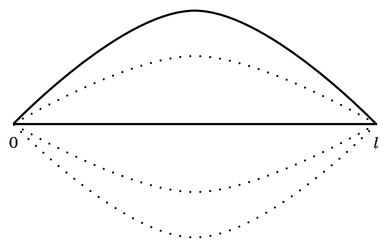

Figura 4

Para $n = 2$, tenemos una onda senoidal sen $\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$ por una amplitud que varia con el tiempo. Aquí existe un nodo en $x = \frac{l}{2}$ que nunca se mueve.

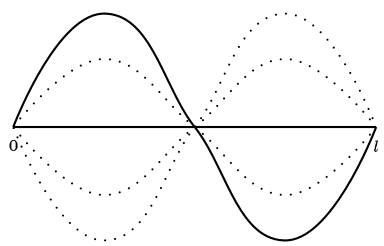

Figura 5

Para $n = 3$, tenemos dos nodos y la figura

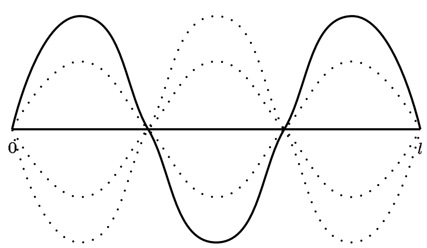

Figura 6

En general el n-ésimo término es una onda senoidal sen $\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ por una amplitud que varia con el tiempo, con $n-1$ nodos.

Así la solución $u(x,t)$ puede interpretarse como la superposición de infinidad de ondas estacionarias.

También existen ondas viajeras asociadas con la ecuación de ondas. Estas surgen en forma natural de la solución de d'Almbert de la ecuación de onda para una *cuerda infinita.*

Problema: Resolver:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x,t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Claramente la solución de d'Ambert es

$$u(x,t) \; = \; \frac{1}{2}\left[f(x+ct) \; - \; f(x-ct)\right] \; + \; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau \, .$$

Por ejemplo, supongamos que

$$g(x) \equiv 0 \, , \quad \text{y que} \quad f(x) \; = \; \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \, . \end{cases}$$

Entonces $u(x,t)$ es la suma de las ondas viajeras

$$\frac{1}{2}f(x+ct) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}f(x-ct)$$

Para $t=0$ están superpuestas

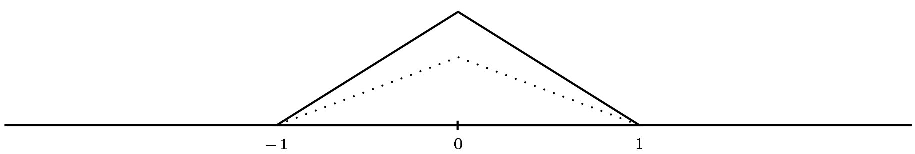

Figura 7

Cuando t aumenta, las dos ondas se separan entre si con velocidad $2c$. Las Figuras 8 y 9 corresponden a los casos $t = \frac{1}{c}$ y $t = \frac{2}{c}$, respectivamente.

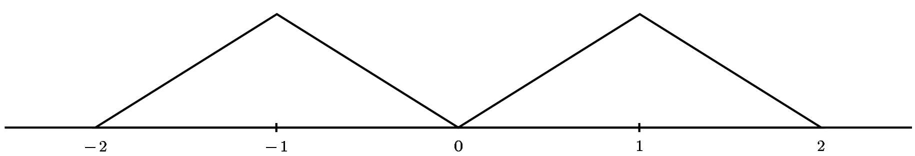

Figura 8

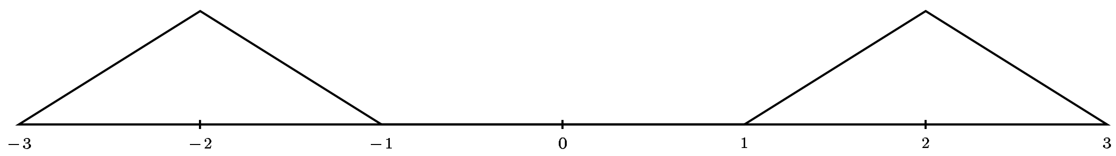

Figura 9

9.3 Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.3.1 Una cuerda tensa de guitarra de longitud 4 está fija en sus extremos. Con los dedos la desplazamos una pequeña distancia 0.3 en el punto $x = 3$, la soltamos con velocidad $g(x) = 2x$ y la cuerda comienza a vibrar. Encuentre el desplazamiento vertical $u(x,t)$ de cualquier punto x para cualquier instante t. También calcule $u(5, \frac{1}{4})$ para $c = 2$.

Solución. La correspondiente ecuación de ondas es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 4\,, \quad t > 0 \\
u(0,t) &= u(4,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= f(x) \;=\; \begin{cases} 0.1x & 0 \le x \le 3 \\ -0.3x + 1.2 & 3 \le x \le 4 \end{cases} \\
u_t(x,0) &= g(x) \;=\; 2x\,, \quad 0 < x < 4
\end{aligned}$$

La solución es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau\,,$$

donde F, G son las extenciones impares de periodo 8 de las funciones f, g respectivamente.

Luego

$$F(x) \;=\; \begin{cases} -0.3x - 1.2 & -4 \le x \le -3 \\ 0.1x & -3 \le x \le 3 \\ -0.3x + 1.2 & 3 \le x \le 4 \end{cases} \qquad F(x+8) \;=\; F(x)\,,$$

y

$$G(x) \;=\; 2x\,, \quad -4 \le x \le 4\,, \qquad G(x+8) \;=\; G(x)\,.$$

Ahora si $c = 2$

$$\begin{aligned}
u(5,\frac{1}{4}) &= \frac{1}{2}[F(5+\frac{1}{2})+F(5-\frac{1}{2})] \;+\; \frac{1}{4}\int_{5-\frac{1}{2}}^{5+\frac{1}{2}} G(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}[F(-3+\frac{1}{2})+F(-3-\frac{1}{2})] \;+\; \frac{1}{4}\int_{-3-\frac{1}{2}}^{3+\frac{1}{2}} 2\tau d\tau \\
&= \frac{1}{2}[0.1\cdot(-3+\frac{1}{2})-0.3\cdot(-3-\frac{1}{2})-1.2] \;+\; \frac{1}{4}[(3-\frac{1}{2})^2-(3+\frac{1}{2})^2] \\
&= -\frac{8}{40}-\frac{3}{2} \;=\; -\frac{17}{10}
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.2 Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0\,, \quad u_t(x,0) = x^3\,, \quad 0 \le x \le 1\,,$$

y las condiciones de frontera

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t) \quad t \ge 0\,,$$

y calcule $u(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$.

Solución. Sabemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,[f_p(x+t) + f_p(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_p(\tau)d\tau\,,$$

donde f_p, g_p son las extensiones pares de periodo 2 de las funciones $f(x) = 0$ y $g(x) = x^3$, respectivamente.

Luego

$$f_p \equiv 0\,, \quad g_p(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g_p(x+2) = g_p(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
u(\frac{2}{3},\frac{3}{2}) &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{5}{6}}^{\frac{13}{6}} g_p(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{5}{6}} \tau^3 d\tau + 2\int_0^1 \tau^3 d\tau + \int_0^{\frac{1}{6}} \tau^3 d\tau\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 2 + \left(\frac{1}{6}\right)^4\right].
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.3 Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & x^3 \\ u_t(x,0) & = & 2x \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 2$$

y las condiciones de frontera

$$u_x(0,t) = 0 = u(2,t) \quad \text{para} t \geq 0\,,$$

y calcule

$$u\left(\frac{3}{2}, 3\right)\,.$$

Solución. Tenemos

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F\left(x + \frac{1}{3}t\right) + F\left(x - \frac{1}{3}t\right)] + \frac{3}{2}\int_{x-\frac{1}{3}t}^{x+\frac{1}{3}t} G(\tau)d\tau$$

con F, G las extenciones par en $x = 0$ e impar en $x = 2$ de periodo 8 de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x$, respectivamente.
Por lo tanto

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccccc} -f(4+x) & = & -(4+x)^3 & \text{si} & -4 \leq x \leq -2 \\ f(-x) & = & -x^3 & \text{si} & -2 \leq x \leq 0 \\ f(x) & = & x^3 & \text{si} & 0 \leq x \leq 2 \\ -f(4-x) & = & -(4-x)^3 & \text{si} & 2 \leq x \leq 4 \end{array}\right.$$

y

$$G(x) = \left\{\begin{array}{ccccc} -g(4+x) & = & -2(4+x) & \text{si} & -4 \leq x \leq -2 \\ g(-x) & = & -2x & \text{si} & -2 \leq x \leq 0 \\ g(x) & = & 2x & \text{si} & 0 \leq x \leq 2 \\ -g(4-x) & = & -2(4-x) & \text{si} & 2 \leq x \leq 4 \end{array}\right.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} u\left(\frac{3}{2}, 3\right) &= \frac{1}{2}\left(F\left(\frac{5}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} G(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left(-\left(4 - \frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) + \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{27}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{26}{16} + \frac{24}{8} = \frac{11}{8}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.4 Considere la ecuación de ondas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= x + Ax, \quad u_t(x,0) = e^x \\
u_x(0,t) &= u(1,t) = A.
\end{aligned}$$

Calcule el valor de la solución cuando $x = \frac{4}{3}$ y $t = \frac{1}{2}$.

Solución. Haciendo un cambio de función de la forma

$$u(x,t) = \alpha x + \beta + v(x,t),$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Además

$$\begin{aligned}
u_x(0,t) &= \alpha + v_x(0,t) = A \quad \Longrightarrow \quad \alpha = A, \\
u(1,t) &= A + \beta + v(1,t) = A \quad \Longrightarrow \quad \beta = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x,t) = Ax + v(x,t),$$

donde $v(x,t)$ satisface

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
v(x,0) &= x, \quad v_t(x,0) = e^x \\
u_x(0,t) &= u(1,t) = 0.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+t) + F(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(\tau)d\tau$$

con F, G las extenciones par en $x = 0$ e impar en $x = 1$ de periodo 4 de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$, respectivamente.
Por lo tanto

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{11}{6}\right) + F\left(\frac{5}{6}\right)\right] + \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{6}}^{\frac{11}{6}} G(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{11}{6}\right) + F\left(\frac{5}{6}\right)\right] + \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{6}}^{1} G(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{11}{6}} G(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Pero

$$F(x) = \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x - 2 & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} e^{-x} & -1 \le x \le 0 \\ e^x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -e^{x-2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Luego

$$F\left(\frac{11}{6}\right) = -\frac{1}{6}, \quad F\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6},$$

lo que implica

$$\begin{aligned} v\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{6}}^{1} e^{\tau} d\tau + \frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{11}{6}} -e^{2-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(e^{1} - e^{\frac{5}{6}}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{6}} - e^{1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,e^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$u\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}A + v\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}A + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,e^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{6}}.$$

Ejercicio 9.3.5 Encuentre la solución $u(x,t)$ del problema

$$\begin{aligned} & u_{tt} = 4u_{xx} + \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\, t > 0 \\ & u(x,0) = 1 + \frac{3}{2\pi}x + \frac{5}{4}\operatorname{sen}(x), \quad u_t(x,0) = x^2 \\ & u(0,t) = 1, \qquad u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 2, \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)$.

Solución. Hagamos un cambio de función de la forma

$$u(x,t) = v(x,t) + H(x).$$

Entonces $H(x)$ debe verificar

$$\left.\begin{aligned} 4H''(x) + \operatorname{sen}(x) &= 0 \\ H(0) &= 1 \\ H(\tfrac{\pi}{2}) &= 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad H(x) = 1 + \frac{3}{2\pi}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x).$$

Entonces $v(x,t)$ debe ser solución de

$$\begin{aligned} & v_{tt} = 4v_{xx} \\ & v(x,0) = \operatorname{sen}(x), \quad v_t(x,0) = x^2 \\ & v(0,t) = v\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+2t) + F(x-2t)] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} G(\tau)d\tau,$$

con F, G las extenciones impar de periodo π de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x^2$, respectivamente.

De esta forma

$$F(x) = \operatorname{sen}(x)\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -x^2 & \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \end{cases}$$

y

$$F(x + \pi) = F(x)\,, \qquad G(x + \pi) = G(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} v\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2} + 2\,\frac{\pi}{3}\right) + F\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\frac{\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{3}} G(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{7\,\pi}{6}\right) + F\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} G(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}[F\left(\frac{\pi}{6}\right) + F\left(-\frac{\pi}{6}\right)] + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} G(\tau)\,d\tau \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{3}{2\,\pi}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} = 2\,.$$

Ejercicio 9.3.6 Demuestre que cualquier problema no homogéneo de la forma

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= A(x) \qquad 0 < x < l\,, t \in \mathbb{R}^+ \\ u_x(0,t) = 0 \quad &; \quad u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad &; \quad u_t(x,0) = g(x)\,. \end{aligned}$$

se transforma en un problema homogéneo con un cambio de función de la forma $u(x,t) = v(x,t) + B(x)$.

Solución. Considerando este cambio de función obtenemos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_{tt} \\ u_{xx} &= v_{xx} + B(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = v_{tt} - c^2 v_{xx} - c^2 B''(x) = A(x)\,,$$

Luego debemos tener

$$A(x) + c^2 B''(x) = 0\,.$$

Además como

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) + B'(0)\,, \quad u(l,t) = v(l,t) + B(l)\,,$$

para mantener las condiciones de frontera homogénea denemos tener

$$B'(0) \;=\; B(l) \;=\; 0\,.$$

Luego debemos encontrar B que verifique:

$$\begin{aligned} B''(x) + \tfrac{1}{c^2}A(x) &= 0 \\ B'(0) = 0 \quad ; \quad B(l) &= 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B(x) \;=\; \frac{1}{c^2}\left[\int_0^l \left(\int_0^u A(s)ds\right) du \;-\; \int_0^x \left(\int_0^u A(s)ds\right) du\right].$$

Ejercicio 9.3.7 Resuelva el problema

$$\begin{aligned} &u_{tt} \;=\; u_{xx} \;+\; 1 \;-\; x\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \\ &u_x(0,t) \;=\; 0\,, \quad u(1,t) \;=\; 0 \\ &u(x,0) \;=\; \tfrac{1}{6}x^3 \;-\; \tfrac{1}{2}x^2 \;-\; x \;+\; \tfrac{4}{3}\,, \quad u_t(x,0) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{7}{2}, 7\right)$.

Solución Ponemos $u(x,t) = v(x,t) + B(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_{tt}\,, \\ u_{xx} &= v_{xx} + B''(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B''(x) = x - 1 \Longrightarrow B(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2\,.$$

Ahora,

$$0 = u_x(0,t) = v_x(0,t) + B'(0) = v_x(0,t) + c_1$$

Por lo tanto, tomamos $c_1 = 0$ y tenemos

$$0 = u(1,t) = v(1,t) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + c_2\,.$$

Ahora tomamos

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

y obtenemos

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$$

Entonces

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{3} = u(x,0) = v(x,0) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$$

Luego $v(x,0) = 1 - x$.

$$0 = u_t(x,0) = v_t(x,0) \Longrightarrow v_t(x,0) = 0.$$

Así nuestra ecuación es:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx} \\ v_x(0,t) &= v(1,t) = 0 \\ v(x,0) &= 1 - x, \quad v_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+t) + F(x-t)\right],$$

donde F es la extensión par de f en 0 e impar en 1 de periodo 4. Es decir

$$F(x) = \begin{cases} 1 + x & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 + x & -1 < x \leq 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$F(x+4) = F(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} v\left(\frac{7}{2}, 7\right) &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{7}{2} + 7\right) + F\left(\frac{7}{2} - 8\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2} + 10\right) + F(\frac{1}{2} - 5)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2} - 2\right) + F\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{-3}{2}\right) + F\left(\frac{-1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{3}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[2 - 2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego

$$u\left(\frac{7}{2}, 7\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 9.3.8 Resuelva

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + tx \\ u(0,t) = u(\pi,0) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x \quad ; \quad u_t(x,0) = 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

usando un cambio del tipo: $u(x,t) = v(x,t) + P_3(x)t$, donde $P_3(x)$ es un polinomio cúbico.

Solución. Poniendo $P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ y $u(x,t) = v(x,t) + P_3(x)t$, obtenemos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_{tt} \\ u_{xx} &= v_{xx} + t(6Ax + 2B) \\ &= u_{tt} - tx = v_{tt} - tx \end{aligned}$$

Para que la ecuación sea homogénea ponemos $B = 0$ y $A = -\frac{1}{6}$. Entonces

$$P_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + Cx + D,$$

y como

$$u(0,t) = v(0,t) + P_3(0)t = v(0,t) + Dt$$

y

$$u(\pi,t) = v(\pi,t) + P_3(\pi)t = v(\pi,t) + (\frac{-1}{6}\pi^3 + C\pi)t$$

para mantener las condiciones de frontera ponemos $D = 0$ y $C = \frac{1}{6}\pi^2$.

De esta forma tenemos

$$P_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}\pi^2 x.$$

Examinamos ahora las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= u(x,0) = v(x,0) \\ 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x) &= u_t(x,0) = v_t(x,0) + P_3(x) = v_t(x,0) - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{6}\pi^2 x. \end{aligned}$$

Luego

$$v(x,0) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad v_t(x,0) = 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{6}x(x^2 - \pi^2).$$

Por lo tanto nuestro problema se reduce a:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = \operatorname{sen} x \quad ; \quad v_t(x,0) = 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{6}x(x^2 - \pi^2). \end{cases}$$

Como $\operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(5x)$ son impares y de periodo 2π y la función $g(x) = \frac{1}{6}x(x^2 - \pi^2)$ es impar, si consideramos la función G definida por

$$G(x) = g(x),\, -\pi \le x \le \pi, \quad G(x + 2\pi) = G(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (5\operatorname{sen}(2\tau) - 3\operatorname{sen}(5\tau) + G(\tau))d\tau \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)] - \frac{10}{4}[\cos(2(x+t)) - \cos(2(x-t))] + \\ &\quad \frac{3}{10}[\cos(5(x+t)) - \cos(5(x-t))] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) - tg(x) \\ &= \frac{1}{2}[\text{sen}(x+t) + \text{sen}(x-t)] - \frac{10}{4}[\cos(2(x+t)) - \cos(2(x-t))] + \\ & \quad \frac{3}{10}[\cos(5(x+t)) - \cos(5(x-t))] - \frac{t}{6}x(x^2-\pi^2) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(\tau)d\tau\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.9 Resuelva la ecuación de ondas

$$\begin{aligned} & u_{tt} - 4u_{xx} = 0\,, \quad 0 \leq x \leq 2\,, \quad t \geq 0 \\ & u_x(0,t) = u(2,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ & u(x,0) = x - 2 \quad u_t(x,0) = x^2 + 1\,, \quad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Solución. Tenemos $c = 2$ y $l = 2$. Consideremos las funciones

$$f(x) = (x-2)\Big/_{[0,2]}\,, \quad g(x) = (x^2+1)\Big/_{[0,2]}\,.$$

Entonces la solución general es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+2t) + F(x-ct)] + \frac{1}{4}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)\,d\tau\,,$$

donde F, G son las extenciones pares en 0 e impares en 2 de las funciones f, g respectivamente.

Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} -f(4+x) = -x-2 & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ f(-x) = -x-2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ f(x) = x-2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -f(4-x) = x-2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

y

$$G(x) = \begin{cases} -g(4+x) = -(4+x)^2-1 & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ g(-x) = x^2+1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ g(x) = x^2+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -g(4-x) = -(4-x)^2-1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

y

$$F(x+8) = F(x)\,, \quad G(x+8) = G(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2}+11\right) + F\left(\frac{1}{2}-11\right)\right] + \frac{1}{4}\int_{-\frac{21}{2}}^{\frac{23}{2}} G(\tau)d\tau\,.$$

Pero

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}+11\right) &= F\left(\frac{1}{2}+3\right) = \frac{1}{2}+3-2 = \frac{3}{2} \\ F\left(\frac{1}{2}-11\right) &= F\left(\frac{1}{2}-3\right) = -\frac{1}{2}+3-2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{21}{2}}^{\frac{23}{2}} G(\tau)d\tau &= \int_{-\frac{21}{2}}^{-10} G(\tau)d\tau + \int_{6}^{\frac{23}{2}} G(\tau)d\tau \\ &= \int_{6+\frac{1}{2}}^{8+\frac{1}{2}} G(\tau)d\tau = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} G(\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau^2+1)\, d\tau = \frac{\tau^3}{3}+\tau\Big/_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

Luego

$$u\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4}\,\frac{19}{6} = \frac{43}{24}.$$

Ejercicio 9.3.10 Usando el método de D'Alembert resuelva

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + 2tx^2\,, \quad 0 \le x \le 3\,, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) &= u_x(3,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \quad u_t(x,0) = \frac{11}{2}x - \frac{1}{24}x^4\,, \quad 0 < x < 3 \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{1}{2},3\right)$.

Indicación. Haga un cambio de función del tipo $u(x,t) = v(x,t) + tA(x)$.

Solución. Con el cambio sugerido tenemos

$$u_{tt} = v_{tt} \qquad \text{y} \qquad 4u_{xx} + 2tx^2 = 4v_{xx} + 4tA''(x) + 2tx^2\,.$$

Luego debemos tener

$$A''(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad A(x) = -\frac{1}{24}x^4 + Bx + C\,.$$

Además

$$0 = u(0,t) = v(0,t) + tC \quad \Longrightarrow \quad C = 0\,, \qquad \text{y}$$

$$0 = u_x(3,t) = v_x(3,t) + t\left(-\frac{1}{6}3^3 + B\right) \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{9}{2}.$$

De esta forma el cambio de función es

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) \;+\; t\,\left(-\frac{1}{24}\,x^4 \;+\; \frac{9}{2}\,x\right)\,.$$

Por otra parte

$$v(x,0) \;=\; u(x,0) \;=\; 0\,, \qquad \text{y}$$

$$v_t(x,0) \;=\; u(x,0) \;+\; \frac{1}{24}\,x^4 \;-\; \frac{9}{2}\,x \;=\; x\,.$$

De esta forma nuestro problema es ahora

$$\begin{aligned} v_{tt} \;&=\; 4v_{xx}\,, \quad 0 \le x \le 3\,, \quad t \ge 0 \\ v(0,t) \;&=\; v_x(3,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0 \\ v(x,0) \;&=\; 0 \qquad v_t(x,0) \;=\; x\,, \quad 0 < x < 3\,. \end{aligned}$$

Así

$$v(x,t) \;=\; \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} G(s)ds\,,$$

donde G es la extensión impar en 0 y par en 3 de periodo 12 de la función $x\Big/_{[0,3]}$.
Por lo tanto

$$G(x) \;=\; \begin{cases} -(6+x) & -6 < x < -3 \\ x & -3 < x < 3 \\ 6-x & 3 < x < 6 \end{cases} \qquad G(x+12) \;=\; G(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Finalmente

$$v\left(\frac{1}{2},3\right) \;=\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{11}{2}}^{\frac{13}{2}} G(s)ds \;=\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{11}{2}}^{\frac{11}{2}} sds \;==\; 0\,,$$

lo que implica

$$u\left(\frac{1}{2},3\right) \;=\; 3\,\left(-\frac{1}{24}\,\frac{1}{16} \;+\; \frac{9}{4}\right) \;=\; \frac{95}{128}\,.$$

Ejercicio 9.3.11 Resuelva el problema de ondas

$$\begin{aligned} u_t t \;&=\; 9u_{xx}\,, \quad 0 \le x \le 2\,, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) \;&=\; u_x(2,t) \;=\; 0 \\ u(x,0) \;&=\; x^2\,, \quad u_t(x,0) \;=\; x+2 \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{13}{4},\frac{31}{12}\right)$.

Solución. Como $c \;=\; 3$ y $l \;=\; 2$, la solución es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\,[F(x+3t) \;+\; F(x-3t)] \;+\; \frac{1}{6}\,\int_{x-3t}^{x+3t} G(\tau)\,d\tau\,,$$

donde F, G son las extensiones impares en 0 y pares en 2 de periodo 8 de las funciones

$$f(x) \;=\; x^2\Big/_{0\le x\le 2} \qquad \text{y} \qquad g(x) \;=\; x+2\Big/_{0\le x\le 2}$$

respectivamente.

Por lo tanto

$$F(x) \;=\; \begin{cases} -(4+x)^2 & -4\le x\le -2 \\ -x^2 & -2\le x\le 0 \\ x^2 & 0\le x\le 2 \\ (4-x)^2 & 2\le x\le 4 \end{cases} \qquad G(x) \;=\; \begin{cases} -6-x & -4\le x\le -2 \\ x-2 & -2\le x\le 0 \\ x+2 & 0\le x\le 2 \\ 6-x & 2\le x\le 4 \end{cases}$$

y

$$F(x+8) \;=\; F(x)\,, \quad G(x+8) \;=\; G(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Por otra parte

$$F\left(\frac{13}{4}+3\,\frac{31}{12}\right) \;=\; F(11) \;=\; F(3) \;=\; (4-3)^2 \;=\; 1$$
$$F\left(\frac{13}{4}-3\,\frac{31}{12}\right) \;=\; F\left(-4-\frac{1}{2}\right) \;=\; F\left(4-\frac{1}{2}\right) \;=\; \left(4-4+\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1}{4}\,,$$

y

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{11} G(\tau)\,d\tau \;=\; \int_{-1}^{0}(\tau-2)d\tau \;+\; \int_{0}^{\frac{1}{2}}(\tau+2)d\tau \;=\; -\frac{1}{2}-2+\frac{1}{8}+1 \;=\; -\frac{11}{8}\,.$$

Luego

$$u\left(\frac{13}{4},\frac{31}{12}\right) \;=\; \frac{5}{8} \;-\; \frac{11}{48} \;=\; \frac{19}{48}\,.$$