Ecuaciones Diferenciales [1]
Capítulo 8
Ecuaciones en Derivadas Parciales y Formas Canónicas

V. Guíñez, R. Labarca y M. Martínez
Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile

[1]Este trabajo fue financiado por el Proyecto de Docencia Usach VG9813

Capítulo 8

Ecuaciones en Derivadas Parciales y Formas Canónicas

8.1 Introducción

Una ecuación en derivadas parciales (E.D.P.) es cualquier expresión del tipo

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0 \tag{8.1}$$

que contiene las variables independientes $x, y, \ldots$, una función incógnita u y sus derivadas parciales sucesivas $u_x, u_y, u_{xx}, \ldots$.

Si n es el número de variables independientes, la ecuación (8.1) se considerará definida en un cierto dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Queremos encontrar funciones $u(x, y, \ldots)$ que verifiquen (8.1) en D. Estas funciones, si existen, serán llamadas **soluciones** de la E.D.P. (8.1).

Llamaremos orden de (8.1) al mayor orden de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación.

Por otra parte (8.1) se dice **lineal**, si la función f es lineal en u y en todas las derivadas parciales de u.

Nos concentraremos en las E.D.P. lineales de segundo orden. A este grupo pertenecen las llamadas ecuaciones de la Física Matemática: ecuación de ondas, ecuación del calor y ecuación de Laplace.

Cuando, además de lineal, la ecuación está definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$, su expresión general es

$$A_1 u_{xx} + A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_4 u_x + A_5 u_y + A_6 u = g(x, y) \tag{8.2}$$

donde $A_i = A_i(x, y), i = 1, \ldots, 6$ son llamados coeficientes de la ecuación y $g = g(x, y)$ término independiente.

Si $g(x, y) \equiv 0$ en D, la ecuación (8.2) se llama **homogénea**. En caso contrario, diremos que la ecuación es **no homogénea** o **completa**.

8.2 Principales diferencias con E.D.O.

1. Para una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) lineal de orden n, la solución general depende de n constantes arbitrarias. En el caso E.D.P., en lugar de constantes, ella depende de funciones arbitrarias. Por ejemplo, para

   $$u_{xy} = 0\,,$$

   la solución general es $u(x,y) = g(x) + h(y)$, con g y h funciones derivables arbitrarias.

   Para obtener de ella una solución particular, hay que agregar condiciones que permitan determinar g y h explícitamente. Esto en general puede ser más difícil que encontrar la solución general. Por ello se consideran procedimientos que permiten encontrar directamente las soluciones particulares que nos interesan.

2. Para el caso E.D.O. lineales homogéneas de orden n, el conjunto solución es un espacio vectorial de dimensión n. Para el caso E.D.P., el conjunto solución es también un espacio vectorial, pero de dimensión infinita.

Ejemplo 8.2.1 Consideremos la ecuación

$$u_x \;-\; u_y \;=\; 0\,.$$

Para encontrar sus soluciones, hagamos primero el cambio de variables

$$r \;=\; x \;+\; y\,, \quad s \;=\; x \;-\; y\,.$$

Usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_s s_x = u_r + u_s\,, \\ u_y &= u_r r_y + u_s s_y = u_r - u_s\,, \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación

$$u_s \;=\; 0\,.$$

La solución general de esta última ecuación es

$$u(r,s) \;=\; f(r)\,,$$

y por lo tanto, la solución general de nuestra ecuación es

$$u(x,y) \;=\; f(x+y)\,,$$

con f una función diferenciable cualquiera.
Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos las soluciones:

$$\begin{array}{rrrcl} 1, & (x+y), & (x+y)^2, & \ldots, & (x+y)^n, \\ & \operatorname{sen}(x+y), & \operatorname{sen}(2(x+y)), & \ldots, & \operatorname{sen}(n(x+y)), \\ & \cos(x+y), & \cos(2(x+y)), & \ldots, & \cos(n(x+y)), \\ & e^{x+y}, & e^{2(x+y)}, & \ldots, & e^{n(x+y)} \end{array}$$

y todas ellas son L.I.

8.3 Clasificación de las E.D.P. de Segundo Orden

Consideremos la ecuación

$$A_1u_{xx} + A_2u_{xy} + A_3u_{yy} + A_4u_x + A_5u_y + A_6u = g(x,y) \tag{8.3}$$

donde cada $A_i = A_i(x,y), i = 1,\ldots,6$, es una función continua definida sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Haciendo una analogía con la ecuación de una cónica en el plano:

$$A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + A_4x + A_5y + A_6 = 0$$

diremos que (8.3) es, en D:

1. hiperbólica si $(A_2)^2 - 4A_1A_3 > 0$ (en D)
2. parabólica si $(A_2)^2 - 4A_1A_3 = 0$ (en D)
3. elíptica si $(A_2)^2 - 4A_1A_3 < 0$ (en D)

Veremos que, en cada caso, (8.3) se puede reducir a una **forma canónica** por medio de cambio de coordenadas.

8.4 Formas Canónicas

Consideremos la ecuación (8.3)

$$A_1u_{xx} + A_2u_{xy} + A_3u_{yy} + A_4u_x + A_5u_y + A_6u \;=\; g(x,y)\ , \tag{8.4}$$

donde $A_i = A_i(x,y), i = 1,\ldots,6$ son funciones continuas definidas en una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sean $r = r(x,y)$ y $s = s(x,y)$, funciones de x, y dos veces derivables tales que

$$J = \begin{vmatrix} r_x & s_x \\ r_y & s_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en } D\,.$$

Supongamos también que la aplicación $(r,s) : D \longrightarrow (r,s)(D)$ es invertible, y que su inversa

$$(x,y) : (r,s)(D) \longrightarrow D$$

tiene funciones componentes $x = x(r,s)\,, y = y(r,s)$ dos veces derivables.

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_x &=& u_rr_x + u_ss_x \\ u_y &=& u_rr_y + u_ss_y \\ u_{xx} &=& u_{rr}(r_x)^2 + 2u_{rs}r_xs_x + u_{ss}(s_x)^2 + u_rr_{xx} + u_ss_{xx} \\ u_{xy} &=& u_{rr}r_xr_y + u_{rs}(r_xs_y + r_ys_x) + u_{ss}s_xs_y + u_rr_{xy} + u_ssxy \\ u_{yy} &=& u_{rr}(r_y)^2 + 2u_{rs}r_ys_y + u_{ss}(s_y)^2 + u_rr_{yy} + u_ss_{yy}\ . \end{array} \right. \tag{8.5}$$

Reemplazando en (8.3) se obtiene

$$B_1 u_{rr} + B_2 u_{rs} + B_3 u_{ss} + B_4 u_r + B_5 u_s + B_6 u \;=\; g(r,s)\;, \tag{8.6}$$

donde $g(r,s) = g(x(r,s), y(r,s))$ y

$$\begin{cases} B_1(r,s) &=& A_1(r_x)^2 + A_2 r_x r_y + A_3 (r_y)^2 \\ B_2(r,s) &=& 2A_1 r_x s_x + A_2(r_x s_y + r_y s_x) + 2A_3 r_y s_y \\ B_3(r,s) &=& A_1(s_x)^2 + A_2 s_x s_y + A_3(s_y)^2 \\ B_4(r,s) &=& A_1 r_{xx} + A_2 r_{xy} + A_3 r_{yy} + A_4 r_x + A_5 r_y \\ B_5(r,s) &=& A_1 s_{xx} + A_2 s_{xy} + A_3 s_{yy} + A_4 s_x + A_5 s_y \\ B_6(r,s) &=& A_6\;, \end{cases}$$

donde las funciones A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, están evaluadas en $(x(r,s), y(r,s))$, y las derivadas parciales de r y s en (r,s).

Observe que la ecuación (8.6) es del mismo tipo que la ecuación (8.3), ya que

$$(B_2)^2 \;-\; 4B_1 B_3 \;=\; J^2((A_2)^2 \;-\; 4A_1 A_3)\;.$$

Supongamos $A_1 \neq 0$ en D y tratemos de determinar r, s como funciones de x e y de modo de obtener, en lo posible, $B_1 \equiv 0$ y $B_3 \equiv 0$ en $(r,s)(D)$.

Tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1(r_x)^2 + A_2 r_x r_y + A_3(r_y)^2 = 0 \\ B_3 &= A_1(s_x)^2 + A_2 s_x s_y + A_3(s_y)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Ambas son de la forma:

$$A_1(f_x)^2 + A_2 f_x f_y + A_3(f_y)^2 = 0,$$

o bién

$$A_1\left(\frac{f_x}{f_y}\right)^2 + A_2\left(\frac{f_x}{f_y}\right) + A_3 = 0\,.$$

Sobre las curvas $f =$ cte. se tiene

$$df = f_x dx + f_y dy = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{f_x}{f_y}$$

y obtenemos

$$A_1(y'(x))^2 - A_2\, y'(x) + A_3 \;=\; 0\;, \tag{8.7}$$

cuyas raíces son

$$y'(x) \;=\; \frac{A_2 + \sqrt{(A_2)^2 \;-\; 4A_1 A_3}}{2A_1} \tag{8.8}$$

$$y'(x) \;=\; \frac{A_2 - \sqrt{(A_2)^2 \;-\; 4A_1 A_3}}{2A_1}\,. \tag{8.9}$$

Definición 8.4.1 Las E.D.O. de primer orden (8.8 - 8.9) se denominan *ecuaciones características* de la E.D.P. (8.3). Sus soluciones

$$y(x) = \lambda_1(x) + c_1$$

$$y(x) = \lambda_2(x) + c_2$$

son llamadas *curvas características.*

Observación 8.4.2 Si la ecuación (8.3) es hiperbólica ($(A_2)^2 - 4A_1A_3 > 0$), el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} r(x,y) &= y - \lambda_1(x) \\ s(x,y) &= y - \lambda_2(x) \end{cases} \tag{8.10}$$

verifica $J \neq 0$ y $B_1 = B_3 \equiv 0$.

8.4.1 Ecuaciones hiperbólicas

En este caso las ecuaciones características son reales y distintas, y el cambio de coordenadas (8.10) nos da

$$u_{rs} = -\tilde{B}_4 u_r - \tilde{B}_5 u_s + \tilde{B}_6 u + \tilde{g}(r,s)\,.$$

Esta expresión es llamada **primera forma canónica de las E.D.P. hiperbólicas**.

Si además hacemos

$$\begin{cases} \alpha &= r + s \\ \beta &= r - s \end{cases}$$

obtenemos

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = c_4 u_\alpha + c_5 u_\beta + c_6 u + \tilde{g}(\alpha,\beta)\,,$$

que es llamada **segunda forma canónica de E.D.P. hiperbólicas**.

Observación 8.4.3 Si $A_1 \equiv 0$ en D, obtenemos en (8.7)

$$-A_2\left(\frac{dx}{dy}\right) + A_3\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0\,,$$

y las ecuaciones características son

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{y} \quad -A_2 + A_3\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0\,,$$

cuyas soluciones son

$$x = c_1\,, \quad x = \lambda_2(y) + c_2\,.$$

Ponemos entonces

$$\begin{cases} r &= x \\ s &= x - \lambda_2(y)\,, \end{cases}$$

y la ecuación transformada tiene la estructura de la primera forma canónica. Para pasar a la segunda, usamos el mismo cambio de coordenadas del caso $A_1 \neq 0$.

Ejemplo 8.4.4 Consideremos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + A(x,t)\,, \quad \text{con} \quad c > 0\,.$$

Tenemos

$$A_1 = -c^2\,, \quad A_2 = 0\,, \quad A_3 = 1\,, \quad \text{y} \quad (A_2)^2 \;-\; 4A_1A_3 = 4c^2\,.$$

Las ecuaciones características son

$$\frac{dx}{dt} \;=\; \pm\frac{2c}{-2c^2} \;=\; \mp\frac{1}{c}\,,$$

y las curvas características:

$$x \;=\; \mp\frac{1}{c}t + c_1\,.$$

Hacemos entonces el cambio de coordenadas:

$$r \;=\; x + \frac{1}{c}t\,, \qquad s \;=\; x - \frac{1}{c}t\,.$$

Como

$$\begin{array}{rclcrcl} r_t & = & \frac{1}{c} & \qquad & r_x & = & 1 \\ s_t & = & -\frac{1}{c} & & s_x & = & 1\,, \end{array}$$

obtenemos

$$B_2 \;=\; +2c^2\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c} \;+\; 2 \;=\; 4\,,$$

y luego

$$u_{rs} \;=\; \frac{1}{4}\,A(\frac{1}{2}(r+s),(\frac{c}{2}(r-s))\,.$$

8.4.2 Ecuaciones parabólicas

En este caso hay sólo una ecuación característica

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{A_2}{2A_1}(x,y)\,,$$

y una sola curva característica

$$y \;=\; \lambda_1(x) + c\,.$$

Ponemos entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r & = & y - \lambda_1(x) \\ s & = & k_1x + k_2y \end{array} \right.$$

con k_1 , k_2 constantes tales que el determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1(x) & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en} \quad D$$

(por ejemplo, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$).

Así obtenemos $B_1 = 0$ y por lo tanto $B_2 = 0$, y la ecuación

$$u_{ss} \;=\; -\tilde{B}_4 u_r - \tilde{B}_5 u_s - \tilde{B}_6 u + \tilde{g}(r,s)\,,$$

llamada **forma canónica para la ecuación parabólica**.

Observación 8.4.5 Si $A_1 \equiv 0$ en D, entonces $A_2 \equiv 0$ y la ecuación ya está en su forma canónica.

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es la ecuación de difusión o del calor

$$u_t \;=\; k u_{xx} \;+\; A(x,t)\,.$$

8.4.3 Ecuaciones elípticas

Las correspondientes ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{A_2}{2A_1} \pm \sqrt{\frac{(A_2)^2 \;-\; 4A_1A_3}{4A_1^2}}\; i$$

y las curvas características:

$$\begin{cases} y \;=\; a(x) + b(x)i + c_1 \\ \\ y \;=\; a(x) - b(x)i + c_2 \end{cases}$$

Ponemos entonces

$$r \;=\; y - (a(x) + b(x)i)$$

$$s \;=\; y - (a(x) - b(x)i)\,.$$

Luego

$$\alpha \;=\; \frac{1}{2}(r+s) \;=\; y - a(x)$$

$$\beta \;=\; \frac{1}{2i}(r-s) \;=\; -b(x)$$

y la ecuación nos queda

$$u_{\alpha\alpha} \;+\; u_{\beta\beta} \;=\; -\tilde{B}_4 u_\alpha \;-\; \tilde{B}_5 u_\beta \;-\; \tilde{B}_6 u \;+\; \tilde{g}(\alpha,\beta)\,.$$

Esta expresión es llamada **forma canónica para las E.D.P. elípticas.**

Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de Laplace

$$u_{xx} \;+\; u_{yy} \;=\; 0\,.$$

Ejemplo 8.4.6 Obtener la forma canónica de la ecuación

$$4u_{xx} \ + \ 5u_{xy} \ + \ u_{yy} \ + \ u_x \ + \ u_y \ = \ 2\,.$$

Como $(A_2)^2 \ - \ 4A_1A_3 \ = \ 25-16 \ = \ 9>0$, la ecuación es hiperbólica en todo $\mathbb{R}^2$.

Las ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dy} \ = \ 1 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} \ = \ \frac{1}{4}\,,$$

y luego, la curvas características son

$$y \ = \ x+c_1 \quad \text{y} \quad y \ = \ \frac{1}{4}x+c_2\,.$$

Entonces el cambio de coordenadas:

$$r \ = \ y-x\,, \qquad s \ = \ y-\frac{1}{4}x\,,$$

produce

$$u_{rs} \ = \ \frac{1}{3}\,u_s \ - \ \frac{8}{9}\,.$$

Ejemplo 8.4.7 Reducir a su forma canónica

$$u_{xx} \ - \ 4x^2u_{yy} \ = \ \frac{1}{x}u_x\,, \quad \text{con} \quad x>0\,.$$

Como $(A_2)^2 - 4A_1A_3 \ = \ 16x^2>0$, la ecuación es hiperbólica. Sus ecuaciones características son

$$y'(x) \ = \ \frac{A_2 \pm \sqrt{(A_2)^2 \ - \ 4A_1A_3}}{2A_1} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) \ = \ \pm 2x\,.$$

En consecuencia las curvas características son:

$$y(x) \ = \ x^2 \quad \text{y} \quad y(x) \ = \ -x^2\,.$$

Hacemos entonces el cambio de coordenadas

$$r(x,y) \ = \ y-x^2\,, \quad s(x,y) \ = \ y+x^2\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_x \ &= \ -2x \qquad r_y \ = \ 1 \\ s_x \ &= \ 2x \qquad\ \ s_y \ = \ 1\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{array}{rclrclrcl} r_{xx} &=& -2 & r_{xy} &=& 0 & r_{yy} &=& 0 \\ \\ s_{xx} &=& 2 & s_{xy} &=& 0 & s_{yy} &=& 0\,. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rclcl} u_x &=& u_r r_x + u_s s_x &=& 2x(u_s - u_r) \\ \\ u_y &=& u_r r_y + u_s s_y &=& u_r + u_s\,, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} u_{xx} &=& 2(u_s - u_r) + 2x(u_{sr} r_x + u_{ss} s_x - u_{rr} r_x - u_{rs} s_x) \\ &=& 2(u_s - u_r) + 2x(-2x u_{sr} + 2x u_{ss} + 2x u_{rr} - 2x u_{rs}) \\ &=& 2(u_s - u_r) + 4x^2(u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss}) \\ \\ u_{yy} &=& u_{rr} r_y + u_{sr} s_y + u_{sr} r_y + u_{ss} s_y \\ &=& u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}\,. \end{array}$$

Reemplazando obtenemos

$$2(u_s - u_r) + 4x^2(u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss}) - 4x^2(u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}) = \frac{1}{x} \cdot 2x(u_s - u_r)\,,$$

es decir

$$-16x^2 u_{sr} = 0\,.$$

Pero como $2x^2 = s - r$, se tiene

$$16(r - s)u_{sr} = 0\,.$$