7.9 Problemas resueltos del Capítulo 7

Ejercicio 7.9.1 Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación

$$y'' - 2y' + 5y \ = \ -8e^{-t} \quad y(0) \ = \ 2 \quad y'(0) \ = \ 12\,.$$

Solución. Llamemos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'(t))(s) &= sY(s) - y(0) \ = \ sY(s) - 2\,, \\
\mathcal{L}(y''(t))(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \ = \ s^2Y(s) - 2s - 12 \qquad \text{y} \\
\mathcal{L}(-8e^{-t})(s) &= -8\mathcal{L}(e^{-t})(s) \ = \ \frac{-8}{s+1}\,\cdot
\end{aligned}$$

Luego aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) - 2s - 8 \ = \ \frac{-8}{s+1}\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} \\ &= \frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2} - \frac{1}{s+1}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2} - \frac{1}{s+1}\right)(t) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right)(t) + \\ &\quad 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right)(t) - \\ &\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)(t) \\ &= 3e^t\cos(2t) + 4e^t\mathrm{sen}(2t) - e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.9.2 Usando transformada de Laplace encuentre la solución de

$$y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos(3t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -1\,.$$

Solución. Sea $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Al aplicar transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) + 1 + 4sY(s) + 13Y(s) \;=\; \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9}\,,$$

lo que implica

$$Y(s) \;=\; -\frac{1}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\,.$$

Tenemos

$$\frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+9} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

y luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+4s+13}\right)(t) \;=\; -\frac{1}{3}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$

Además si ponemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+13} \\ &= \frac{As(s^2+4s+13) + B(s^2+4s+13) + (Cs+D)s^2}{s^2(s^2+4s+13)}\,, \end{aligned}$$

obtenemos

$$A = \frac{-8}{169}, \quad B = \frac{2}{13}, \quad C = \frac{8}{169}, \quad D = \frac{6}{169}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= \frac{-8}{169}\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{1}{169}\cdot\frac{8s+6}{s^2+4s+13} \\
&= \frac{-8}{169}\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{8}{169}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{10}{3\cdot 169}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}\,,
\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\right)(t) \;=\; \frac{-8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos(3t) - \frac{10}{507}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}
\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} &= -\frac{3}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\right)(t) \;=\; \frac{1}{2}t\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$

Por lo tanto

$$y(t) \;=\; -\frac{179}{507}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos(3t) + \frac{1}{2}t\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{2}{13}t - \frac{8}{169}\,.$$

Ejercicio 7.9.3 a) Si $y(t)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden p :

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2-p^2)y(t) \;=\; 0\,,$$

muestre que la transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ satisface

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1-p^2)Y(s) \;=\; 0\,.$$

b) Resolver esta última ecuación para $p = 0$, expresándola en la forma

$$\frac{d}{ds}[A(s)Y'(s) + B(s)Y(s)] \;=\; 0$$

para algún $A(s)$ y $B(s)$.

Solución. a) Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(-p^2y(t))(s) &= -p^2Y(s)\,,\\
\mathcal{L}(t^2y(t))(s) &= Y''(s)\,,\\
\mathcal{L}(ty'(t))(s) &= \tfrac{d}{ds}(-\mathcal{L}(y'(t))(s)) = -\tfrac{d}{ds}(sY(s)-y(0)) = -Y(s)-sY'(s)\,,\\
\mathcal{L}(t^2y''(t))(s) &= \tfrac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}(y''(t))(s)) = \tfrac{d^2}{ds^2}(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))\\
&= 2Y(s)+4sY'(s)+s^2Y''(s)\,.
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$\mathcal{L}(t^2y''(t))(s)+\mathcal{L}(ty'(t))(s)+\mathcal{L}(t^2y(t))(s)+\mathcal{L}(-p^2y(t))(s) \;=\; 0\,,$$

y reemplazando se tiene

$$2Y(s)+4sY'(s)+s^2Y''(s)-Y(s)-sY'(s)+Y''(s)-p^2Y(s) \;=\; 0\,,$$

es decir

$$(1+s^2)Y''(s)+3sY'(s)+(1-p^2)Y(s) \;=\; 0\,.$$

b) Poniendo $p=0$ obtenemos la ecuación

$$(1+s^2)Y''(s)+3sY'(s)+Y(s) \;=\; 0\,,$$

que podemos escribir de la forma

$$\frac{d}{ds}[(1+s^2)Y'(s)+sY(s)] \;=\; 0\,.$$

Integrando esta última ecuación tenemos

$$(1+s^2)Y'(s)+sY(s) \;=\; c_1\,,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La correspondiente ecuación homogénea es

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} \;=\; -\frac{s}{1+s^2}$$

que tiene solución

$$Y_h(s) \;=\; \frac{c}{\sqrt{1+s^2}}\,.$$

Haciendo variar la constante $c=c(s)$ y reemplazando obtenemos

$$c'(s) \;=\; \frac{c_1}{\sqrt{1+s^2}}\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} c(s) &= c_1 \int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \; + \; c_2 \\ &= c_1 \ln(s+\sqrt{1+s^2}) + c_2 \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Y(s) \;=\; c_1 \frac{\ln(s+\sqrt{1+s^2})}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1+s^2}} \,.$$

Ejercicio 7.9.4 Resuelva usando transformada de Laplace la ecuación

$$y'' \;+\; 4y \;=\; f(t)\,, \quad y(0) \;=\; y'(0) \;=\; 0\,,$$

donde

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 3 \\ t & t \geq 3 \end{cases}$$

Solución. Primero observemos que

$$f(t) \;=\; tH(t-3) \;=\; (t-3)H(t-3) \;+\; 3H(t-3)\,,$$

donde

$$H(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Entonces si $Y(s) \;=\; \mathcal{L}(y(t))(s)$, aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial obtenemos

$$(s^2 \;+4)\,Y(s) \;=\; \frac{3s+1}{s^2}\,e^{-3s}\,.$$

Esto implica

$$Y(s) \;=\; \frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\,e^{-3s}\,,$$

y luego

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\,e^{-3s}\right)(t)\,.$$

Escribiendo

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)} \;=\; \frac{A}{s} \;+\; \frac{B}{s^2} \;+\; \frac{Cs+D}{s^2+4}\,,$$

se obtiene

$$A \;=\; \frac{3}{4}\,, \quad B \;=\; \frac{1}{4}\,, \quad C \;=\; -\frac{3}{4}\,, \quad D \;=\; -\frac{1}{4}\cdot$$

Así

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)} \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{1}{s} \;+\; \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2} \;-\; \frac{3}{4}\,\frac{s}{s^2+4} \;-\; \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2+4}\,,$$

y

$$g(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\right)(t) \;=\; \frac{3}{4} \;+\; \frac{1}{4}\,t \;-\; \frac{3}{4}\,\cos(2t) \;-\; \frac{1}{8}\,\sin(2t)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t-3)\,H(t-3) \\ &= \left(\frac{3}{4} \;+\; \frac{1}{4}\,(t-3) \;-\; \frac{3}{4}\,\cos(2(t-3)) \;-\; \frac{1}{8}\,\sin(2(t-3))\right)\,H(t-3)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.9.5 Resuelva usando transformada de Laplace la ecuación

$$y'' \;+\; ty' \;-\; y \;=\; 0\,, \quad y(0) \;=\; 0\,, \quad y'(0) \;=\; 1\,.$$

Solución. Sea $Y(s) \;=\; \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\mathcal{L}(ty'(t))(s) \;=\; -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s) \;=\; -\frac{d}{ds}[sY(s)-y(0)] \;=\; -Y(s) \;-\; sY'(s)$$

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) \;=\; s^2Y(s) \;-\; sy(0) \;-\; y'(0) \;=\; s^2Y(s) \;-\; 1\,.$$

Luego, aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) \;-\; 1 \;-\; Y(s) \;-\; sY'(s) \;-\; Y(s) \;=\; 0\,,$$

es decir la ecuación lineal de primer orden

$$Y'(s) \;+\; \left(\frac{2}{s}-s\right)Y(s) \;=\; -\frac{1}{s}\,.$$

Su solución es

$$\begin{aligned} Y(s) &= e^{-\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}\left(-\int e^{\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}\,\frac{1}{s}\,ds \;+\; c\right) \\ &= e^{-\left(\ln(s^2)-\frac{s^2}{2}\right)}\left(-\int e^{\ln(s^2)-\frac{s^2}{2}}\,\frac{1}{s}\,ds \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(-\int s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\frac{1}{s}\,ds \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(\int -se^{-\frac{s^2}{2}}\,ds \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(e^{-\frac{s^2}{2}} \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2} \;+\; \frac{c}{s^2}\,e^{\frac{s^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Finalmente como

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(y(t))(s) \;=\; 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^2}\, e^{\frac{s^2}{2}} \;=\; \infty \;,$$

debemos tener $c \;=\; 0$. Así

$$Y(s) \;=\; \frac{1}{s^2}\;,$$

y por lo tanto

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) \;=\; t\;.$$

Ejercicio 7.9.6 a) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\, J_0(x) \;=\; -J_1(x)\,.$$

b) Sabiendo que

$$\mathcal{L}(J_0(x))(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{s^2\;+\;1}}\,,$$

usando transformada de Laplace demuestre que

$$(J_0 * J_1)(x) \;=\; J_0(x) \;-\; \cos(x)\,.$$

Solución. a) Como

$$J_0(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\;,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}J_0(x) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\; 2k\; \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}\; \frac{1}{2} \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\;(k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\;k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)-1} \\
&=\; -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!\;k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
&=\; -J_1(x)\;.
\end{aligned}$$

b) Tenemos

$$\mathcal{L}((J_0 * J_1)(x))(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{s^2\;+\;1}}\, \mathcal{L}(J_1(x))(s)\;.$$

Pero

$$J_1 \;=\; -{J_0}' \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}\mathcal{L}(J_1(x))(s) &= -[s\mathcal{L}(J_0(x))(s) \;-\; J_0(0)] \\ &= \tfrac{-s}{\sqrt{s^2\,+\,1}} \;+\; 1\;.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((J_0 * J_1)(x))(s) &= \frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\left(1 \;-\; \frac{s}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}} \;-\; \frac{s}{s^2\,+\,1}\;,\end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}(J_0 * J_1)(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\right)(x) \;-\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\right)(x) \\ &= J_0(x) \;-\; \cos(x)\;.\end{aligned}$$