6.9 Problemas resueltos del Capítulo 6

Ejercicio 6.9.1 Usando series de potencias encuentre la solución general de la ecuación

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y \;=\; 0\,,$$

alrededor de $x = 0$. Determine su intervalo máximo de definición.

Solución. Como los puntos singulares son $x = 1$ y $x = -1$, la solución general alrededor de $x = 0$ está definida por lo menos para $\mid x \mid < 1$.
Sea

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
-4y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -4a_n x^n \\
-6xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -6na_n x^n \\
-x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1)a_n x^n \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(-4-6n-n(n-1))a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \;=\; 0\,,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{n=0}^{\infty}[-(n+4)(n+1)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto debemos tener

$$a_{n+2} \;=\; \frac{n+4}{n+2}\,a_n \quad \forall n\geq 0\,.$$

Así para $n=0,1,2,3,4$ y 5 obtenemos

$$\begin{array}{lllll} a_2 &=& \frac{4}{2}\,a_0 & & \qquad a_3 \;=\; \frac{5}{3}\,a_1 \\ a_4 &=& \frac{6}{4}\,a_2 &=& \frac{6}{2}\,a_0 \qquad a_5 \;=\; \frac{7}{5}\,a_3 \;=\; \frac{7}{3}\,a_1 \\ a_6 &=& \frac{8}{6}\,a_4 &=& \frac{8}{2}\,a_0 \qquad a_7 \;=\; \frac{9}{7}\,a_5 \;=\; \frac{9}{3}\,a_1 \end{array}$$

De aquí podemos concluir que para todo $n\geq 1$ se tiene

$$a_{2n} \;=\; \frac{2(n+1)}{2}\,a_0 \;=\; (n+1)\,a_0 \qquad \text{y} \qquad a_{2n+1} \;=\; \frac{2n+3}{3}\,a_1\,.$$

Entonces la solución general es

$$y(x) \;=\; a_0\,[1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}] \;+\; a_1\,[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3}x^{2n+1}]\,, \qquad a_0,a_1\in\mathbb{R}\,.$$

Finalmente el intervalo máximo de definición de la solución general es]-1, 1[, ya que por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ diverge para $x\pm 1$.

Ejercicio 6.9.2 Usando series de potencia encuentre la solución general alrededor de $x=0$ de la ecuación

$$y'' \;-\; 2x^2y' \;-\; 6xy \;=\; 0\,.$$

Determine además el intervalo máximo donde la solución está definida.

Solución. Como esta ecuación no tiene puntos singulares la solución general alrededor de $x=0$ estará definida para todo $x\in\mathbb{R}$.

Sea

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} -6x\phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}-6a_nx^{n+1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}-6a_{n-1}x^n \\ -2x^2\phi'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}-2na_nx^{n+1} \;=\; \sum_{n=2}^{\infty}-2(n-1)a_{n-1}x^n \\ \phi''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$2a_2 \ + \ 6(a_3 - a_0)x \ + \ \sum_{n=2}^{\infty} [(-4-2n)a_{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \ = \ 0 \, .$$

Por lo tanto debemos tener

$$a_2 \ = \ 0 \, , \quad a_3 \ = \ a_0 \, , \quad \text{y} \quad a_{n+2} \ = \ \frac{2}{n+1}\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \, .$$

Como el salto en la recurrencia es 3, los coeficientes de la forma a_{3n} se escriben en términos de a_0, los de la forma a_{3n+1} en términos de a_1 y los de la forma a_{3n+2} en términos de a_2.

De esta forma

$$a_{3n} \ = \ \frac{2}{3n-1}\, a_{3n-3} \ = \ \frac{2}{3n-1} \cdot \frac{2}{3n-4} \cdot \frac{2}{3n-7} \cdots \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{2}\, a_0$$

lo que implica que para todo $n \geq 1$

$$a_{3n} \ = \ \frac{2^n}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots \cdot (3n-1)}\, a_0 \, .$$

También

$$a_{3n+1} \ = \ \frac{2}{3n}\, a_{3n-2} \ = \ \frac{2}{3n} \cdot \frac{2}{3n-3} \cdot \frac{2}{3n-6} \cdots \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3}\, a_1$$

lo que implica que para todo $n \geq 1$

$$a_{3n+1} \ = \ \frac{2^n}{3^n \, n!}\, a_1 \, .$$

Finalmente como

$$a_{3n+2} \ = \ 0 \, , \qquad \text{para todo} \quad n \geq 0 \, ,$$

la solución general es

$$\begin{aligned} \phi(x) \ &= \ a_0 \, [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots \cdot (3n-1)}\, x^{3n}] \ + \\ & \quad\ a_1 \, [x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \, n!}\, x^{3n+1}] \, , \end{aligned}$$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Ejercicio 6.9.3 Usando series de potencias resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Solución. Como las funciones x y -1 son analíticas en todo punto, buscamos soluciones de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Como

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2},$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + (n-1)\, a_n]\, x^n = 0 .$$

Por lo tanto

$$2a_2 - a_0 = 0 \quad \text{y} \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + (n-1)\, a_n = 0,$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Luego

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0$$

y

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{(n+2)\,(n+1)}\, a_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

De esta forma

$$a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

y para $n \geq 2$

$$a_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{(2n)!}\, a_0 = (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}\,(n-2)!(2n)!}\, a_0 .$$

Luego la solución general es

$$y(x) = a_1\, x + a_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}\,(n-2)!(2n)!}\, x^{2n}\right) .$$

Finalmente la condición inicial

$$y(0) \;=\; 2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 \;= 2 \quad \text{y} \quad y'(0) \;=\; \frac{1}{2} \Longrightarrow \quad a_1 \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

De esta forma la solución particular buscada es

$$y(x) \;= \frac{1}{2}\,x \;+\; 2\left(1 \;+\; \frac{1}{2}\,x^2 \;+\; \sum_{n=2}^{\infty} \,(-1)^{n+1}\, \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}\,(n-2)!(2n)!}\,x^{2n}\right)\,.$$

Ejercicio 6.9.4 Usando el método de Frobenious encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - x(\frac{1}{2} + 2x)y' + \frac{1}{2}(1-2x)y \;=\; 0\,,$$

alrededor de $x = 0$. Determine para que valores de x está definida la solución.

Solución. El único punto singular de la ecuación es $x = 0$. Además, como las funciones $a(x) = -(\frac{1}{2} + 2x)$ y $b(x) = \frac{1}{2}(1-2x)$ son analíticas en $x = 0$, $x = 0$ es punto singular regular.
El polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} \;=\; (r-1)(r - \frac{1}{2})\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Luego estamos en el caso $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ no es cero ni un entero positivo.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x,r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r)x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\phi(x) \;&=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}c_k(r)x^k \\
-x\phi(x) \;&=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} -c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r \sum_{k=1}^{\infty} -c_{k-1}(r)x^k\,, \\
-\frac{1}{2}x\phi'(x) \;&=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2}(k+r)c_k(r)x^k\,, \\
-2x^2\phi'(x) \;&=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} -2(k+r)c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r \sum_{k=1}^{\infty} -2(k-1+r)c_{k-1}(r)x^k \\
x^2\phi''(x) \;&=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$c_0(r)x^r q(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [q(r+k)c_k(r) + (-1-2(k-1+r))c_{k-1}(r)]x^k \, .$$

Ponemos entonces

$$c_k(r) \;=\; \frac{-(-1-2(k-1+r))c_{k-1}(r)}{q(r+k)} \;=\; \frac{2(r+k-\frac{1}{2})c_{k-1}(r)}{(r+k-1)(r+k-\frac{1}{2})} \;=\; \frac{2c_{k-1}(r)}{k+r-1} \, .$$

Luego si $c_0(r) = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} c_k(r) &= \frac{2c_{k-1}(r)}{k+r-1} = \frac{2^2 c_{k-2}}{(k+r-1)(k+r-2)} \\ &\vdots \\ &= \frac{2^k}{(r+k-1)(r+k-2)\cdots(r+1)r} \\ &= \frac{2^k}{r(r+1)\cdots(r+k-1)} \, . \end{aligned}$$

Para $r = r_1 = 1$ obtenemos

$$c_k(r_1) = \frac{2^k}{1\cdot 2\cdots k} \;=\; \frac{2^k}{k!}$$

y

$$\phi_1(x) \;=\; x[1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}x^k] \, .$$

Para $r = r_2 = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$c_k(r_2) = \frac{2^k}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}} \;=\; \frac{4^k}{1\cdot 3\cdots(2k-1)} \;=\; \frac{8^k k!}{(2k)!}$$

y

$$\phi_2(x) \;= |\; x \;|^{-\frac{1}{2}} [1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k k!}{(2k)!}x^k] \, .$$

Por lo tanto la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) + b\phi_2(x) \, , \quad a, b \in \mathbb{R} \, ,$$

Ella está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, ya que $x = 0$ es el único punto singular.

Ejercicio 6.9.5 Usando Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$x^2y'' \;+\; \frac{3}{2}x(1+2x)y' \;-\; \frac{1}{2}(1-12x)y \;=\; 0 \, .$$

Solución.Tenemos

$$P(x) \;=\; \frac{3}{2}(1+2x) \quad \text{y} \quad Q(x) \;=\; -\frac{1}{2}(1-12x)\,.$$

Luego el polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) \;+\; \frac{3}{2}r \;-\; \frac{1}{2} \;=\; (r \;+\; 1)(r \;-\; \frac{1}{2})\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$, y $r_2 \;=\; -1$. Además como $r_1 - r_2 \;=\; \frac{3}{2}$ no es un entero, tenemos soluciones linealmente independientes asociadas a r_1 y r_2.

Sea

$$\phi(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\phi(x) &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}a_n x^n \\
6x\phi(x) &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 6a_{n-1}x^n \\
3x^2\phi'(x) &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+1} \;=\; x^r \sum_{n=1}^{\infty} 3(n-1+r)a_{n-1}x^n \\
\frac{3}{2}x\phi'(x) &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2}(n+r)a_n x^n \\
x^2\phi''(x) &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n-1+r)a_n x^n\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$a_0 q(r)x^r \;+\; x^r \sum_{n=1}^{\infty} [q(r+n)a_n \;+\; (6 \;+\; 3(n-1+r))a_{n-1}]x^n \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto debemos tener $r = r_1$ o $r = r_2$ y

$$a_n \;=\; -\frac{(6 \;+\; 3(n-1+r))}{(r+n+1)(r+n-\frac{1}{2})}\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Simplificando obtenemos

$$a_n \;=\; -\frac{3}{r+n-\frac{1}{2}}\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Entonces poniendo $a_0 = 1$, tenemos

$$a_n \;=\; \frac{(-1)^n\; 3^n}{(r+\frac{1}{2})(r+\frac{3}{2})\cdots(r+\frac{2n-1}{2})}\,, \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1\,.$$

Para $r = r_1 = \frac{1}{2}$ nos queda

$$a_n \;=\; \frac{(-1)^n\; 3^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \;=\; \frac{(-1)^n\; 3^n}{n!}\,,$$

lo que genera la solución

$$\phi_1(x) \;= |\; x\;|^{\frac{1}{2}} \left(1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\; 3^n}{n!} x^n\right)\,.$$

Para $r = r_2 = -1$ nos queda

$$\begin{aligned} a_n \;&=\; \frac{(-1)^n\; 3^n}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}} \\ &=\; \frac{-2^n\;(-1)^n\; 3^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)} \\ &=\; \frac{(-1)^{n+1}\; 3^n\; 2^{2n-2}\;(n-2)!}{(2n-3)!}\,, \end{aligned}$$

lo que genera la solución

$$\phi_2(x) \;= |\; x\;|^{-1} \left(1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\; 3^n\; 2^{2n-2}\;(n-2)!}{(2n-3)!} x^n\right)\,.$$

Por lo tanto la solución general es con $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Ejercicio 6.9.6 Con los cambios de coordenadas $t \;=\; 2x^4$ y $y \;=\; x^3 z$ transforme la ecuación

$$y'' \;-\; \frac{5}{x}\,y' \;+\; 8\left(8x^6 \;+\; \frac{1}{x^2}\right) y \;=\; 0$$

en una ecuación de Bessel. Use esto para encontrar su solución general.

Solución. Usando los cambios de coordenadas sugeridos obtenemos

$$\begin{aligned} y' \;&=\; \frac{dy}{dx} \;=\; 3x^2 z \;+\; x^3\frac{dz}{dx} \\ y'' \;&=\; \frac{d^2y}{dx^2} \;=\; 6xz \;+\; 6x^2\frac{dz}{dx} \;+\; x^3\frac{d^2z}{dx^2}\,, \end{aligned}$$

y la ecuación

$$x^3\frac{d^2z}{dx^2} \;+\; x^2\frac{dz}{dx} \;+\; (64x^9 \;-\; x)z \;=\; 0\,.$$

Como $\frac{dt}{dx} = 8x^3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dx} = 8x^3\frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= 24x^2\frac{dz}{dt} + 64x^6\frac{d^2z}{dt^2}\,, \end{aligned}$$

y la ecuación

$$64x^9\frac{d^2z}{dt^2} + 32x^5\frac{dz}{dt} + (64x^9 - x)z = 0\,.$$

Dividiendo por $16x$ y haciendo el reemplazo $t = 2x^4$, obtenemos finalmente la ecuación de Bessel

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (t^2 - \frac{1}{16})z = 0\,,$$

cuya solución general es

$$z(t) = c_1\, J_{\frac{1}{4}}(t) + c_2\, J_{-\frac{1}{4}}(t)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = x^3\left(c_1\, J_{\frac{1}{4}}(2x^4) + c_2\, J_{-\frac{1}{4}}(2x^4)\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 6.9.7 Usando el método de Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' - \frac{1}{2}(x^2+1)y = 0\,.$$

Solución. Como

$$P(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad Q(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)$$

son analíticas, $x = 0$ es un punto singular regular.

El polinomio indicial es

$$q(r) = r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = (r + 1)(r - \frac{1}{2})\,.$$

Sus raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$. Además como $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ no es un entero, podemos encontrar soluciones linealmente independientes asociadas a r_1 y r_2 por el método de Frobenius. Sea

$$\phi(x) = x^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r)x^k\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\phi(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2}c_k(r)x^k \\
-\frac{1}{2}x^2\phi(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2}c_k(r)x^{k+2} \;=\; x^r \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{1}{2}c_{k-2}(r)x^k \\
\frac{3}{2}x\phi'(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\frac{3}{2}c_k(r)x^k \\
x^2\phi''(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k \;,
\end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$x^r\left(c_0(r)q(r) \;+\; c_1(r)q(r+1)x \;+\; \sum_{k=2}^{\infty}\left[q(r+k)c_k(r) \;-\; \frac{1}{2}c_{k-2}(r)\right]x^k\right) \;=\; 0\,.$$

Así debemos tener $c_1(r) \;=\; 0$ (ya que $q(r+1) \neq 0$ para $r=r_1$ y $r=r_2$ y

$$c_k(r) \;=\; \frac{\frac{1}{2}\;c_{k-2}(r)}{(r+k+1)(r+k-\frac{1}{2})} \quad \text{para todo} \quad k \geq 2\,.$$

Luego para todo $k \geq 1$ tenemos

$$c_{2k-1}(r) \;=\; 0$$

y asumiendo $c_0(r) \;=\; 1$,

$$c_{2k}(r) \;=\; \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(r+3)(r+5)\cdots(r+2k+1)(r+\frac{3}{2})(r+\frac{7}{2})\cdots(r+\frac{4k-1}{2})}\,.$$

Para $r=r_1=\frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
c_{2k}(r_1) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\frac{7}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdots\frac{4k+3}{2}\cdot 2\cdot 4\cdots(2k)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k\; 2^k}{7\cdot 11\cdots(4k+3)\cdot 2^k\cdot k!} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{7\cdot 11\cdots(4k+3)\cdot k!}
\end{aligned}$$

y la solución

$$\phi_1(x) \;=|\; x \;|^{\frac{1}{2}} \left(1 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{7 \cdot 11 \cdots (4k+3) \cdot k!} \, x^{2k} \right) \; .$$

Para $r = r_2 = -1$ se obtiene

$$\begin{aligned} c_{2k}(r_2) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{2 \cdot 4 \cdots (2k) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{4k-3}{2}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k \; 2^k}{2^k \cdot k! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)} \; , \end{aligned}$$

y la solución

$$\phi_2(x) \;=|\; x \;|^{-1} \left(1 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)} \, x^{2k} \right) \; .$$

De esta forma la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) \;+\; b\phi_2(x)$$

con a, b números reales arbitrarios.

Ejercicio 6.9.8 Usando el método de Frobenious encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$x^2 y'' - x(3+5x)y' + (4+5x)y \;=\; 0\,.$$

Solución. El único punto singular de la ecuación es $x = 0$. Además, como las funciones $a(x) = -(3+5x)$ y $b(x) = 4+5x$ son analíticas en $x = 0$, $x = 0$ es punto singular regular.
El polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) - 3r + 4 \;=\; (r-2)^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 2$.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x, r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
4\phi(x) &= \phi(x,r) \;=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}4c_k(r)x^k\,,\\
5x\phi(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}5c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r\sum_{k=1}^{\infty}5c_{k-1}(r)x^k\,,\\
-3x\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}-3(k+r)c_k(r)x^k\,,\\
-5x^2\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}-5(k+r)c_k(r)x^{k+1} \;= x^r\sum_{k=1}^{\infty}-5(k-1+r)c_{k-1}(r)x^k\,,\\
x^2\phi''(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\,.
\end{aligned}$$

Poniendo $c_0(r)\equiv 1$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$x^rq(r)+x^r\sum_{k=1}^{\infty}[q(r+k)c_k(r)+5(1-(k-1+r))c_{k-1}(r)]x^k \;=\; 0\,.$$

Ponemos entonces

$$c_k(r) \;=\; \frac{5(k+r-2)c_{k-1}(r)}{(k+r-2)^2} \;=\; \frac{5c_{k-1}(r)}{r+k-2}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
c_k(r) &= \frac{5c_{k-1}(r)}{k+r-2} \;=\; \frac{5^2c_{k-2}}{(k+r-2)(k+r-3)}\\
&\;\vdots\\
&= \frac{5^k}{(r+k-2)(r+k-3)\cdots(r+1)r(r-1)}\\
&= \frac{5^k}{(r-1)r(r+1)\cdots(r+k-2)}\,.
\end{aligned}$$

Para $r=r_1=1$ obtenemos

$$c_k(r_1)=\frac{5^k}{1\cdot 2\cdots k} \;=\; \frac{5^k}{k!}$$

y

$$\phi_1(x) \;=\; x^2[1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}x^k]\,.$$

Para obtener una segunda solución linealmente independiente con la anterior, calculamos $c_k'(r)$ para r cercano a 2.
Tenemos

$$\begin{aligned} c_k'(r) &= -1\cdot 5^k[\frac{1}{(r-1)^2 r(r+1)\cdots(r+k-2)} + \frac{1}{(r-1)r^2(r+1)\cdots(r+k-2)} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(r-1)r(r+1)^3\cdots(r+k-2)}] \\ &= \frac{-5^k}{(r-1)r(r+1)\cdots(r+k-2)}[\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{r+k-2}]\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c_k'(r_1) = \frac{-5^k}{k!}[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}]\,.$$

Luego nuestra segunda solución es

$$\phi_2(x) \;=\; -x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}]x^k \;+\; \ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) + b\phi_2(x)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Ella está definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ya que $x = 0$ es el único punto singular.

Ejercicio 6.9.9 Usando el método de Frobenious encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2 y'' - xy' + (1-x)y \;=\; 0\,,$$

alrededor de $x = 0$. Determine para que valores de x está definida la solución.

Solución. El único punto singular de la ecuación es $x = 0$. Además, como las funciones $a(x) = -1$ y $b(x) = 1 - x$ son analíticas en $x = 0$, $x = 0$ es punto singular regular.
El polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) - r + 1 \;=\; (r-1)^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 1$.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x, r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
-x\phi(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} -c_k(r)x^{k+1} = x^r \sum_{k=1}^{\infty} -c_{k-1}(r)x^k\,,\\
-x\phi'(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} -(k+r)c_k(r)x^k\,,\\
x^2\phi''(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$c_0(r)x^r q(r) + \sum_{k=1}^{\infty}[q(r+k)c_k(r) - c_{k-1}(r)]x^k = 0\,.$$

Ponemos entonces

$$c_k(r) = \frac{c_{k-1}(r)}{q(r+k)} = \frac{c_{k-1}(r)}{(r+k-1)^2}\,.$$

Luego si $c_0(r) = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
c_k(r) &= \frac{c_{k-1}(r)}{(k+r-1)^2} = \frac{c_{k-2}}{(k+r-1)^2(k+r-2)^2}\\
&\vdots\\
&= \frac{1}{(r+k-1)^2(r+k-2)^2\cdots(r+1)^2r^2}\\
&= \frac{1}{r^2(r+1)^2\cdots(r+k-1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Para $r = r_1 = 1$ obtenemos

$$c_k(r_1) = \frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdots k^2} = \frac{1}{(k!)^2}$$

y

$$\phi_1(x) = x[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}x^k]\,.$$

Para obtener una segunda solución linealmente independiente con la anterior, calculamos $c_k'(r)$ para r cercano a 1.
Tenemos

$$\begin{aligned}
c_k'(r) &= -2[\frac{1}{r^3(r+1)^2\cdots(r+k-1)^2} + \frac{1}{r^2(r+1)^3\cdots(r+k-1)^2} +\\
&\quad \cdots + \frac{1}{r^2(r+1)^2\cdots(r+k-1)^3}]\\
&= -2c_k(r)[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{r+k-1}]\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c_k'(r_1) = \frac{-2}{(k!)^2}[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}]\,.$$

Luego nuestra segunda solución es

$$\phi_2(x) \;=\; x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(k!)^2}[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}]x^k \;+\; \ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) + b\phi_2(x)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,$$

Ella está definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ya que $x = 0$ es el único punto singular.

Ejercicio 6.9.10 a) Muestre que la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y \;=\; 0\,,$$

se convierte en una ecuación de Gauss con el cambio $x^2 = t$.
b) Usando parte a) determine dos soluciones linealmente independientes para $m = \frac{1}{2}$.

Solución. a) Como $x^2 = t$, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = 2x\frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dt} + 4x^2\frac{d^2y}{dt^2}\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(1-t)\left(2\frac{dy}{dt} + 4t\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2\sqrt{t}\;2\sqrt{t}\;\frac{dy}{dt} + m(m+1)y = 0\,,$$

o bien

$$4t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + [2(1-t) - 4t]\frac{dy}{dt} + m(m+1)y = 0\,,$$

y dividiendo por 4

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right]\frac{dy}{dt} + \frac{m(m+1)}{4}y = 0\,.$$

Esta es una ecuación de Gauss con $c = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1+\sqrt{1+4m(m+1)}}{4}$ y $b = \frac{1-\sqrt{1+4m(m+1)}}{4}$.
b) Para $m = \frac{1}{2}$ tenemos $c = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{4}$ y $b = -\frac{1}{4}$.
Como $a - c + 1 = \frac{5}{4}$, $b - c + 1 = \frac{1}{4}$, $2 - c = \frac{3}{2}$ y $1 - c = \frac{1}{2}$, la solución general de nuestra ecuación de Gauss es

$$y(t) \;=\; c_1F\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, t\right) \;+\; c_2t^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, t\right)\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación original es

$$y(x) \;=\; c_1F\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, x^2\right) \;+\; c_2xF\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, x^2\right)\,.$$