Ecuaciones Diferenciales [1]
Capítulo 6
Soluciones en Serie de Potencias

V. Guíñez, R. Labarca y M. Martínez
Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile

[1]Este trabajo fue financiado por el Proyecto de Docencia Usach VG9813

Capítulo 6

Soluciones en Serie de Potencias

6.1 Recuerdos de Series de Potencias

Una **serie de potencias** en un punto x_0 es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad = \quad a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{6.1}$$

donde x es la variables y los coeficientes a_n son constantes.

Se dice que (6.1) **converge** (resp. **converge absolutamente**) en $x = r$ si la serie infinita (de números reales)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r-x_0)^n \qquad (\text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n(r-x_0) \mid^n)$$

converge; es decir, si el límite de la sumas parciales

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(r-x_0)^n \qquad (\text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{N} \mid a_n(r-x_0) \mid^n)$$

cuando N tiende a infinito existe (pertenece a $\mathbb{R}$).

Si este límite no existe, se dice que la serie de potencias (6.1) *diverge* en $x = r$.

El siguiente resultado, cuya demostración fue hecha en los cursos de Cálculo, determina para que valores de x la serie de potencia (6.1) converge.

Teorema 6.1.1 *1. Para cada serie de potencias de la forma (6.1), existe un número R, $0 \leq R \leq \infty$, llamado* **radio de convergencia**, *tal que (6.1) converge absolutamente para $\mid x - x_0 \mid < R$ y diverge para $\mid x - x_0 \mid > R$.*

2. Si

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = L$$

entonces

$$\begin{aligned}
&a) \quad 0 < L < \infty \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{L}\\
&b) \quad L = \infty \quad \Longrightarrow \quad R = 0\\
&c) \quad L = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = \infty
\end{aligned}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid$ *no existe, se deben emplear otros métodos para calcular* R *(por ejemplo: el criterio de la raíz).*

3. *Si la serie de potencias (6.1) tiene radio de convergencia* $R > 0$*, podemos definir*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R\,.$$

Entonces $\forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R$*,* $f(x)$ *es diferenciable y*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}\,.$$

Además el radio de convergencia de esta nueva serie de potencias es también R*.*
Por lo tanto $\forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R$*,* $f(x)$ *es infinitamente diferenciable y podemos obtener sus derivadas derivando término a término en la serie de potencias.*

4. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

5. *También se tiene*

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C \qquad \forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R\,.$$

Ejemplo 6.1.2 Calculemos el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (x-3)^n\,.$$

Tenemos

$$\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \mid \frac{(-2)^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{(-2)^n} \mid = \mid -2 \frac{n+1}{n+2} \mid = 2 \frac{n+1}{n+2} \to 2\,.$$

Por lo tanto $R = \frac{1}{2}$ y la serie converge absolutamente para $\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$, y diverge para $x < \frac{5}{2}$ y $x > \frac{7}{2}$. Para $x = \frac{5}{2}$ nos queda la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{(serie armónica)}\,,$$

que es divergente.
Para $x = \frac{7}{2}$ nos queda la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{(serie armónica alternada)}\,,$$

que es convergente.
Luego el conjunto de convergencia de esta serie de potencias es el intervalo $]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$

Ejemplo 6.1.3 Consideremos las serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \,.$$

Tenemos $L = 1$ y por lo tanto su radio de convergencia es $R = 1$. Como claramente esta serie no converge para $x = \pm 1$, su conjunto de convergencia es el intervalo $]-1, 1[$. Además $\forall \quad -1 < x < 1$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{progresión geométrica de razón } x\,.$$

Ejemplo 6.1.4 Cambiando x por $-x$ en la serie anterior obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,.$$

Por lo tanto $R = 1$, su conjunto de convergencia es $]-1, 1[$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,.$$

Ejemplo 6.1.5 También las siguientes series de potencias tienen radio de convergencia $R = 1$ y conjunto de convergencia el intervalo $]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\,.$$

Como la segunda serie se obtiene integrando término a término la primera y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,,$$

tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad = \quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad = \quad \arctan(x) \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,.$$

Además como la tercera serie se obtiene derivando término a término la serie del ejemplo (6.1.3) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad = \quad \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,.$$

6.2 Recuerdos de Funciones Analíticas

Se dice que una función $f(x)$ es **analítica** en $x = x_0$ si existe intervalo abierto $I(x_0)$ en torno a x_0 y sucesión (a_n) de números reales tal que

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \forall\, x \in I(x_0)\,.$$

Observe que la serie anterior necesariamente tiene radio de convergencia $R > 0$.

Ejemplo 6.2.1 La función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es analítica en $]-1, 1[$.

Por (6.1.3) sabemos que es analítica en $x = 0$. Si $x_0 \in$]-1,1[,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)} = \frac{1}{1-x_0} \frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}} \\ &= \frac{1}{1-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x_0)^n} (x-x_0)^n \end{aligned}$$

y el radio de convergencia de esta serie de potencias es $R = \mid 1 - x_0 \mid > 0$.

Ejemplo 6.2.2 Más en general si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ es analítica en todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

En efecto si $x_1 \in]x_0 - R, x_0 + R[$, f es infinitamente diferenciable en $x = x_1$ y entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_1)^n$$

con $b_n = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$.

Ejemplo 6.2.3 Todo polinomio $f(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$, es analítico en todo punto x_0 de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.2.4 Toda función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (donde $P(x), Q(x)$ son polinomios), es analítica en todo x_0 tal que $Q(x_0) \neq 0$.

Ejemplo 6.2.5 Las siguientes funciones son analíticas en todo $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots &&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots &&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cos(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \cdots &&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

y las respectivas series de potencias tienen radio de convergencia $R = \infty$.

Ejemplo 6.2.6 La función

$$\ln(x) \quad = \quad x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

es analítica para todo $x_0 > 0$ y el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = 1$.

6.3 Solución en torno a puntos ordinarios

Consideremos la ecuación homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,, \tag{6.2}$$

en su forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\,. \tag{6.3}$$

Definición 6.3.1 *Un punto x_0 se dice un* **punto ordinario** *de (6.2) o de (6.3) si las funciones $p = \frac{a_1}{a_2}$ y $q = \frac{a_0}{a_2}$ son analíticas en x_0. Si x_0 no es ordinario para (6.2) se dice que x_0 es un* **punto singular** *de (6.2).*

Ejemplo 6.3.2 Considere la ecuación

$$xy'' + \frac{x}{1-x}y' + sen(x)y = 0\,.$$

Entonces $p(x) = \frac{1}{1-x}$ es analítica en todo $x_0 \neq 1$. Por otra parte

$$q(x) \quad = \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}{x} \quad = \quad 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots$$

y como esta serie tiene radio de convergencia $R = \infty$, $q(x)$ es analítica en todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Así el único punto singular de nuestra ecuación es $x_0 = 1$.

El siguiente teorema nos dice como resolver (6.2) alrededor de un punto ordinario.

Teorema 6.3.3 *Si x_0 es punto ordinario de (6.2), entonces (6.2) tiene dos soluciones analíticas linealmente independientes de la forma*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

con radio de convergencia mayor o igual que la distancia de x_0 al punto singular (real o complejo) de (6.2) más cercano a x_0.

Ejemplo 6.3.4 Encuentre la solución general de

$$y'' - xy = 0$$

alrededor de $x_0 = 0$.

Primero notemos que como nuestra ecuación no tiene puntos singulares, las soluciones que encontremos usando el teorema (6.3.3) estarán definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Debemos determinar los valores de los coeficientes a_n para que $\phi(x)$ sea solución de nuestra ecuación. Sus derivadas son:

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \phi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0\,.$$

Dejando ambas sumatorias con término general x^n tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0\,,$$

y juntando las sumatorias

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}] x^n = 0\,.$$

Por lo tanto debemos tener

$$a_2 = 0 \quad \text{y} \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

lo que implica

$$a_2 = 0 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Para darnos cuenta como es la expresión del término general a_n, lo calculamos para los primeros valores de n. Tenemos para $n = 1, 2$ y 3 respectivamente

$$a_3 = \frac{1}{3.2} a_0 \qquad a_4 = \frac{1}{4.3} a_1 \qquad a_5 = \frac{1}{5.4} a_2 = 0\,,$$

y para $n = 4, 5$ y 6

$$a_6 = \frac{1}{6.5} a_3 = \frac{1}{(2.3)(5.6)} a_0 \qquad a_7 = \frac{1}{7.6} a_4 = \frac{1}{(3.4)(6.7)} a_1 \qquad a_8 = \frac{1}{8.7} a_5 = 0\,.$$

Esto nos permite darnos cuenta que para todo $n \geq 1$

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2.3)(5.6)\cdots(3n-1)(3n)} \qquad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3.4)(6.7)\cdots(3n)(3n+1)} \quad \text{y}$$

$$a_{3n+2} = 0\,,$$

con a_0 y a_1 arbitrarios. Luego si definimos

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2.3)(5.6)\cdots(3n-1)(3n)} \\ \phi_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3(n+1)}}{(3.4)(6.7)\cdots(3n)(3n+1)}\,, \end{aligned}$$

como $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son L.I. ($W(\phi_1, \phi_2)(0) = 1$) la solución general de nuestra ecuación es

$$\phi(x) = a_0\phi_1(x) + a_1\phi_2(x) \quad , \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

6.4 Ecuación de Legendre y Polinomios de Legendre

En ésta sección estudiaremos las soluciones de la **ecuación de Legendre**

$$L(y) = (1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0\,,$$

donde α es una constante real, alrededor del punto $x = 0$.

Como las funciones

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$$

son analíticas en todo $x \neq \pm 1$, los puntos singulares de la ecuación de Legendre son precisamente $x = \pm 1$. Por lo tanto el punto $x = 0$ es ordinario y las soluciones $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, estarán definidas por lo menos para $\mid x \mid < 1$.
Para este $\phi(x)$ tenemos

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \phi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Luego

$$-2x\phi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -2n a_n x^n \quad \text{y}$$

$$\phi''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \quad \text{y} \quad -x^2\phi''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1) a_n x^n\,.$$

Reemplazando en la ecuación de Legendre obtenemos

$$\begin{aligned} L(\phi)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2a_n + \alpha(\alpha+1)a_n)]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)(\alpha-n)a_n]x^n \quad = \quad 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos tener para todo $n \geq 0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)(\alpha-n)a_n \quad = \quad 0$$

lo que implica

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha+n+1)(\alpha-n)}{(n+2)(n+1)}\,a_n\,.$$

Para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} a_2 &= -\tfrac{(\alpha+1)\alpha}{2.1}a_0 \\ a_3 &= -\tfrac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3.2}a_1 \\ a_4 &= -\tfrac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{4.3}a_2 = \tfrac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4.3.2.1}a_0 \\ a_5 &= -\tfrac{(\alpha+4)(\alpha-3)}{5.4}a_3 = \tfrac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5.4.3.2}a_1 \\ a_6 &= -\tfrac{(\alpha+5)(\alpha-4)}{6.5}a_4 = -\tfrac{(\alpha+5)(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)}{6.5.4.3.2}a_0\,. \end{aligned}$$

A partir de estos valores se puede demostrar por inducción que para todo $n \leq 1$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}a_0\,, \\ a_{2n+1} &= (-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}a_1\,. \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}\,, \\ \phi_2(x) &= x + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Entonces $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ están definidas por lo menos para $\mid x \mid< 1$ y son linealmente independientes $(W(\phi_1, \phi_2)(0) = 1)$. Luego la solución general de la ecuación de Legendre es

$$\phi(x) \quad = \quad a_0\phi_1(x) \quad + \quad a_1\phi_2(x)\,, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Observaciones 6.4.1 1. Si $\alpha = 2m$ con m un número natural, entonces

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= 1+ \\ &\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}\,,\end{aligned}$$

es un polinomio de grado $2m$ que contiene solo potencias pares de x. Por su parte $\phi_2(x)$ es una serie infinita de potencias. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\alpha = 0 &\implies \phi_1(x) = 1\,,\\ \alpha = 2 &\implies \phi_1(x) = 1 - 3x^2\,,\\ \alpha = 4 &\implies \phi_1(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\,.\end{aligned}$$

2. Si $\alpha = 2m+1$ con m un número natural, entonces $\phi_1(x)$ es una serie infinita de potencias, pero ahora $\phi_2(x)$ es un polinomio de grado $2m+1$ que contiene solo potencias impares de x. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\alpha = 1 &\implies \phi_2(x) = x\,,\\ \alpha = 3 &\implies \phi_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3\,,\\ \alpha = 5 &\implies \phi_2(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5\,.\end{aligned}$$

3. Luego podemos concluir que para todo número natural m, existe un polinomio de grado m que es solución de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y \quad = \quad 0\,.$$

Definición 6.4.2 *Sea n un número natural. Se llama* **enésimo polinomio de Legendre** *al polinomio $P_n(x)$ de grado n que es solución de la ecuación de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y \quad = \quad 0\,,$$

y verifica $P_n(1) = 1$.

La siguiente fórmula, que demostraremos como ejercicio, nos dá una definición alternativa de los polinomios de Legendre.

Ejercicio 6.4.3 Para todo número natural n se tiene

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,.$$

Demostración. Fijado n consideremos el polinomio $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Tenemos entonces

$$u'(x) = n(x^2-1)^{n-1}2x \quad \Longrightarrow \quad (x^2-1)u'(x) - 2nxu(x) = 0\,.$$

Derivando consecutivamente esta última expresión k veces se obtiene

$$\begin{array}{l}(x^2-1)u''(x) + 2xu'(x) - 2nxu'(x) - 2nu(x) = 0\\ (x^2-1)u'''(x) + 4xu''(x) + 2u'(x) - 2nxu''(x) - 4nu'(x) = 0\\ \vdots\\ (x^2-1)u^{(k+1)}(x) + 2xku^{(k)}(x) + k(k-1)u^{(k-1)}(x) - 2nxu^{(k)}(x) - 2nku^{(k-1)}(x) = 0\end{array}$$

Poniendo $k = n+1$ en la última ecuación se tiene

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)u^{(n+1)}(x) + (n+1)nu^{(n)}(x) - 2nxu^{(n+1)}(x) - 2n(n+1)u^{(n)}(x) = 0\,,$$

y agrupando términos

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2xu^{(n+1)}(x) - n(n+1)u^{(n)}(x) = 0\,.$$

Poniendo $q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}u(x)$ y multiplicando por -1 obtenemos

$$(1-x^2)q_n''(x) - 2xq_n'(x) + n(n+1)q_n(x) = 0\,.$$

Luego el polinomio $q_n(x)$, que es de grado n, es solución de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y \quad = \quad 0\,.$$

Además

$$\begin{array}{rcl} q_n(x) & = & [(x^2-1)^n]^{(n)} \quad = \quad [(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)}\\ & = & [(x-1)^n]^{(n)}(x+1)^n \quad + \quad \text{términos que contienen a } x-1 \text{ como factor}\\ & = & n!(x+1)^n \quad + \quad \text{términos que contienen a } x-1 \text{ como factor}\,.\end{array}$$

Por lo tanto

$$q_n(1) = 2^n n!\,,$$

y así

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,.$$

Los siguientes tres ejercicios se dejan para ser resueltos por el lector.

Ejercicio 6.4.4 Usando la fórmula anterior compruebe que

$$P_0(x) = \; 1\,, \quad P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\,, \quad P_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x\,,$$

$$P_4(x) = \; \tfrac{35}{32}x^4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}\,.$$

Ejercicio 6.4.5 Sea $f(x)$ una función n veces continuamente diferenciable en el intervalo $[-1,1]$ y sea

$$I \quad = \quad \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx \,.$$

Integrando por partes demuestre que

$$I \quad = \quad \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx \,.$$

Ejercicio 6.4.6 Demuestre que

$$\int \cos^{2n+1}(\theta)d\theta \quad = \quad \frac{1}{2n+1}\cos^{2n}(\theta)\mathrm{sen}(\theta) \quad + \quad \frac{2n}{2n+1}\int \cos^{2n-1}(\theta)d\theta \,.$$

El siguiente ejercicio nos dice que la familia de los polinomios de Legendre es ortogonal.

Ejercicio 6.4.7 Pruebe que

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \neq n; \\ 1, & \text{si} \quad m = n\,. \end{cases}$$

Demostración. Usando ejercicio (6.4.5) con $f(x) = P_m(x)$ y $m < n$, tenemos $f^{(n)}(x) = 0$ para todo x y por lo tanto $I = 0$. Esto demuestra la fórmula para $n \neq m$.

Supongamos ahora $f(x) = P_n(x)$. Entonces $f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ y luego

$$I \quad = \quad \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \quad = \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx \,.$$

Para resolver esta integral pongamos $x = \mathrm{sen}(\theta)$ y usemos ejercicio (6.4.6):

$$\begin{aligned}
I \quad &= \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)d\theta \\
&= \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\Big(\frac{1}{2n+1}\cos^{2n}(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \quad + \quad \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}(\theta)d\theta\Big) \\
&= \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}(\theta)d\theta \\
&= \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)d\theta \\
&= \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2^n n!}{1.3.5.\cdots(2n+1)} \quad = \quad \frac{2(2n)!}{2^n n!}\,\frac{n!2^n}{(2n)!(2n+1)} \\
&= \quad \frac{2}{2n+1}\,.
\end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula cuando $m = n$.

Ejercicio 6.4.8 Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py \;=\; 0\,.$$

a) Demuestre que la solución general es

$$y(x) \;=\; c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \cdots \\ y_2(x) &= x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

Encuentre el enésimo sumando de ambas series y pruebe que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) Muestre que si $p = 2n$ con n un número natural, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2n$ que contiene solo potencias pares de x y que $y_2(x)$ es una serie infinita. Muestre que si $p = 2n+1$ con n un número natural, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2n+1$ que contiene solo potencias impares de x y que $y_1(x)$ es una serie infinita.
Calcule estos polinomios para $p = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.
c) Para cada número natural n se define el **enésimo polinomio de Hermite** $H_n(x)$, como el polinomio que es solución de

$$y'' - 2xy' + 2ny \;=\; 0$$

y cuyo término dominante es 2^nx^n.
Calcule $H_1(x), H_2(x), \cdots, H_5(x)$.
d) Pruebe que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,.$$

6.5 Solución en torno a puntos singulares regulares

Definición 6.5.1 *Sea x_0 un punto singular de la ecuación*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \;=\; 0\,.$$

Entonces x_0 se dice un punto **singular regular** *de la ecuación si las funciones*

$$(x - x_0)p(x) \quad y \quad (x - x_0)^2q(x)$$

son analíticas en $x = x_0$.

Ejemplo 6.5.2 Considere la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y \;=\; 0\,.$$

Sabemos que sus únicos puntos singulares son $x = \pm 1$. Aquí

$$p(x) \;=\; \frac{-2x}{1-x^2} \quad \text{y} \quad q(x) \;=\; \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\,.$$

Como las funciones

$$(x-1)p(x) \;=\; \frac{2x}{1+x} \quad \text{y} \quad (x-1)^2 q(x) \;=\; -\alpha(\alpha+1)\frac{x-1}{1+x}$$

son analíticas en $x = 1$, y las funciones

$$(x+1)p(x) \;=\; -\frac{2x}{1-x} \quad \text{y} \quad (x+1)^2 q(x) \;=\; \alpha(\alpha+1)\frac{x+1}{1-x}$$

son analíticas en $x = -1$, tenemos que ambos puntos $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre.

Ejemplo 6.5.3 Para $p \geq 0$ considere la **ecuación de Bessel de orden p**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y \;=\; 0\,.$$

Claramente su único punto singular es $x = 0$. Como

$$x\frac{x}{x^2} \;=\; 1 \quad \text{y} \quad x^2\frac{x^2-p^2}{x^2} \;=\; x^2 - p^2$$

son analíticas en $x = 0$, el punto $x = 0$ es punto singular regular de la ecuación de Bessel.

Ejemplo 6.5.4 También se puede comprobar que $x = 0$ es punto singular regular de la ecuación de Euler

$$x^2y'' + pxy' + qy \;=\; 0\,.$$

Observaciones 6.5.5 Suponga que x_0 es punto singular regular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \;=\; 0\,.$$

Entonces multiplicando la ecuación por $(x-x_0)^2$ nos queda la ecuación

$$(x-x_0)^2y'' + (x-x_0)P(x)y' + Q(x)y \;=\; 0\,,$$

donde las funciones $P(x) = (x-x_0)p(x)$ y $Q(x) = (x-x_0)^2q(x)$ son analíticas en $x = x_0$.

6.6 Método de Frobenius

En esta sección desarrollaremos el método de Frobenius para resolver una ecuación homogénea de segundo orden alrededor de un punto singular regular. Primero que nada observemos que las soluciones pueden no estar definidas en el punto singular, ya que la misma ecuación no está definida allí. Note además que podemos restringirnos al caso en que el punto singular regular es $x = 0$, haciendo una traslación en la variable independiente si es necesario, y en que la ecuación es de la forma

$$L(y) \; = \; x^2y'' + xP(x)y' + Q(x)y \; = \; 0\,, \tag{6.4}$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ analíticas en $x = 0$.
De esta forma

$$P(x) \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad \text{y} \quad Q(x) \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$$

y las series son convergentes para $\mid x \mid < R$, $R > 0$.
Buscaremos soluciones ϕ de la forma

$$\phi(x) \; = \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{con} \quad c_0 \neq 0$$

definidas inicialmente solo para $x > 0$, $x < R$. Tenemos

$$\phi'(x) \; = \; x^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k x^k \quad \text{y} \quad \phi''(x) \; = \; x^{r-2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q(x)\phi(x) \; &= \; x^r \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \Big) \\
&= \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\beta}_k x^k \quad \text{con} \quad \tilde{\beta}_k = \sum_{j=0}^{k} c_j \beta_{k-j}\,, \\
xP(x)\phi'(x) \; &= \; x^r \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \Big) \\
&= \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_k x^k \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha}_k = \sum_{j=0}^{k} (j+r) c_j \alpha_{k-j}\,, \quad \text{y} \\
x^2\phi''(x) \; &= \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$L(\phi)(x,r) \; = \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1)c_k + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k] x^k \; = \; 0\,.$$

Entonces

$$[\quad]_k \;=\; (k+r)(k+r-1)c_k + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \;=\; 0\,, \qquad \forall k = 0,1,2,\cdots.$$

Pero

$$\begin{aligned}
[\quad]_k &= (k+r)(k+r-1)c_k \;+\; \sum_{j=0}^{k}(j+r)c_j\alpha_{k-j} \;+\; \sum_{j=0}^{k} c_j\beta_{k-j}\,,\\
&= [(k+r)(k+r-1)+(k+r)\alpha_0+\beta_0]c_k \;+\; \sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}]c_j\,,\\
&= [q(r+k)c_k \;+\; d_k]\,,
\end{aligned}$$

donde

$$q(r) \;=\; r(r-1)+\alpha_0 r+\beta_0\,, \quad \text{y} \quad d_k \;=\; \sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}]c_j\,.$$

El polinomio cuadrático $q(r) = r(r-1)+\alpha_0 r+\beta_0$ es llamado el **polinomio indicial** asociado a la ecuación. Para $k=0$

$$[\quad]_0 \;=\; q(r)c_0 \;=\; 0$$

y luego los únicos valores que pueden admitirse para r son la raíces de q. Observe además que d_k es combinación lineal de $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ y que si estos ya están calculados, c_k también puede calcularse por la fórmula

$$c_k(r) = \frac{-d_k(r)}{q(r+k)}$$

sí y sólo sí $q(r+k) \neq 0$.

Entonces bajo la condición $q(r+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$, todos los $c_k(r)$ pueden calcularse recursivamente de modo que si la serie

$$\phi(x,r) \;=\; c_0x^r + x^r\sum_{k=1}^{\infty} c_k(r)x^k$$

converge para $0 < x < r$, tengamos

$$L(\phi)(x,r) \;=\; c_0q(r)x^r\,.$$

Bajo estas condiciones

$$\phi(x,r) \quad \text{es solución} \quad \Longleftrightarrow \quad r \quad \text{es raíz de } q\,.$$

Sean r_1, r_2 las raíces de q y supongamos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \geq r_2$. Entonces

$$q(r_1+k) \neq 0 \quad \forall k \geq 1\,,$$

lo que implica que si definimos los $c_k(r_1)$ por la fórmula

$$c_0(r_1) = 1 \quad \text{y} \quad c_k(r_1) = \frac{-d_k(r_1)}{q(r_1+k)} \quad \forall k \geq 1\,,$$

tenemos que

$$\phi_1(x) \;=\; x^{r_1}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r_1)x^k)$$

es solución si la serie converge.

Si r_2 es distinto de r_1 y si se verifica que $q(r_2+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$, entonces poniendo también

$$c_0(r_2) = 1 \quad \text{y} \quad c_k(r_2) = \frac{-d_k(r_2)}{q(r_2+k)} \quad \forall k \geq 1\,,$$

resulta que

$$\phi_2(x) \;=\; x^{r_2}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r_2)x^k)$$

es otra solución si la serie converge.

El siguiente teorema nos garantiza que estas series convergen para $\mid x \mid < r$, que las soluciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ están definidas también para $-r < x < 0$ (poniendo $\mid x \mid^r$ en lugar de x^r) y que son linealmente independientes. Antes una pequeña observación.

Observaciones 6.6.1

$$\begin{aligned} q(r_2+k) \neq 0 \quad \forall k \geq 1 \qquad &\Longleftrightarrow \quad r_1 \neq r_2 + k \quad \forall k \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad r_1 - r_2 \quad \text{no es un entero positivo}\,. \end{aligned}$$

Teorema 6.6.2 *Consideremos la ecuación*

$$x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y \;=\; 0\,,$$

donde $a(x), b(x)$ tienen desarrollo en serie de potencias (centradas en $x = 0$) convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$, $\rho_0 > 0$.
Suponga que las raíces r_1, r_2 del polinomio indicial

$$q(r) \;=\; r(r-1) + a(0)r + b(0)\,,$$

son reales y distintas, digamos $r_1 > r_2$.
Entonces, para $0 < \mid x \mid < \rho_0$, existe solución $\phi_1(x)$ de la forma

$$\phi_1(x) \;= \mid x \mid^{r_1} (1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k)\,,$$

donde la serie converge para $| x |< \rho_0$.
Además si $r_1 - r_2$ *no es un entero positivo, existe una segunda solución*

$$\phi_2(x) \;=| \; x \; |^{r_2} \; (1+\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k x^k) \,,$$

tal que la serie converge para $| x |< \rho_0$.
Tales soluciones son linealmente independientes para $0 <| x |< \rho_0$, *y los coeficientes* c_k *y* $\tilde{c}_k$ *pueden obtenerse sustituyendo en la ecuación.*

Para desarrollar el siguiente ejemplo conviene tener en cuenta la siguiente identidad que puede ser demostrada por inducción

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1) \;=\; \frac{(2k+1)!}{2^k \; k!} \,. \tag{6.5}$$

Ejemplo 6.6.3 Consideremos la ecuación

$$L(y) \;=\; x^2 y'' + \frac{3}{2} x y' + x y \;=\; 0 \,.$$

Su polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) + \frac{3}{2} r \quad = \quad r^2 + \frac{1}{2} r \quad = \quad r(r+\frac{1}{2}) \,,$$

cuyas raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$.
Busquemos una solución de la forma

$$\phi(x) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
x\phi(x) \;&=\; x^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} &&=\; x^r \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k \,, \\
\frac{3}{2} x\phi'(x) \;&=\; x^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^k &&=\; x^r \frac{3}{2} r c_0 + x^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2}(k+r) c_k x^k \,, \\
x^2\phi''(x) \;&=\; x^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k &&=\; x^r r(r-1) c_0 + \\
& && \quad\; x^r \sum_{k=1}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L(\phi)(x) \;=\; c_0 x^r + x^r \sum_{k=1}^{\infty} [q(r+k) c_k + c_{k-1}] x^k \,,$$

lo que implica que para todo $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{-c_{k-1}}{q(r+k)} \\
\Longrightarrow \quad c_k &= \frac{c_{k-2}}{q(r+k)q(r+k-1)} \\
&\vdots \\
\Longrightarrow \quad c_k &= \frac{(-1)^k c_0}{q(r+k)q(r+k-1)\cdots q(r+1)}\,.
\end{aligned}
$$

En $r = r_1 = 0$ tenemos $q(r_1+k) = q(k) = k(k+\frac{1}{2})$, lo que implica que, tomando $c_0(r_1) = 1$, para todo $k \geq 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
c_k(r_1) &= \frac{(-1)^k}{1\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{7}{2}\cdots k\cdot\frac{2k+1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^k\, 2^k}{k!\, 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)} \\
&= \frac{(-1)^k\, 2^k\, 2^k\, k!}{k!\,(2k+1)!} \qquad \text{(usando (6.5))} \\
&= \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k+1)!}\,.
\end{aligned}
$$

Por su parte, en $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ tenemos $q(r_2+k) = q(-\frac{1}{2}+k) = (k-\frac{1}{2})k$. Luego si $c_0(r_2) = 1$, para todo $k \geq 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
c_k(r_2) &= \frac{(-1)^k}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3\cdots\frac{2k-1}{2}\cdot k} \\
&= \frac{(-1)^k\, 2^k}{k!\, 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)} \\
&= \frac{(-1)^k\, 2^k\, 2^{k-1}\,(k-1)!}{k!\,(2k-1)!} \qquad \text{(usando (6.5))} \\
&= \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k)!}\,.
\end{aligned}
$$

De esta forma

$$
\phi_1(x) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k+1)!} x^k \quad \text{y} \quad \phi_2(x) \;=\; |\,x\,|^{-\frac{1}{2}}\,(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k)!} x^k)\,,
$$

y la solución general es

$$
\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) \;+\; b\phi_2(x)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.
$$

Finalmente observe que como las funciones $a(x) = \frac{3}{2}$ y $b(x) = x$ tienen desarrollo en serie de potencias convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$, nuestra solución general está definida para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Casos excepcionales.
Llamemos $\phi_1(x)$ la solución encontrada para $r = r_1$ según el procedimiento anterior. Veremos aquí como se encuentra una segunda solución $\phi_2(x)$, linealmente independiente con $\phi_1(x)$ en los casos $r_1 = r_2$ y $r_1 - r_2$ igual a un entero positivo.
1) $r_1 = r_2$.
En este caso

$$q(r_1) = q'(r_1) = 0\,.$$

Observe que existe $\delta > 0$ tal que si $r \in]r_1 - \delta, r_1 + \delta[$ entonces $q(r+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$. Luego para estos r's y cada $k \geq 1$ existen coeficientes $c_k = c_k(r)$ tales que si

$$\phi(x,r) = x^r(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r)x^k)\,,$$

entonces

$$L(\phi)(x,r) \;=\; x^r q(r)\,.$$

También para todo $r \in]r_1 - \delta, r_1 + \delta[$, tenemos

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)(x,r) \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial r} L(\phi)(x,r) \;=\; [q'(r) + \ln(x) q(r)]x^r \\ &\Longrightarrow \;\; L\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)(x,r_1) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi_2(x) \;&=\; \frac{\partial \phi}{\partial r}(x,r_1) \\ &=\; x^{r_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(r_1)x^k) \;+\; \ln(x)x^{r_1}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r_1)x^k) \\ &=\; x^{r_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(r_1)x^k) \;+\; \ln(x)\phi_1(x)\,, \end{aligned}$$

es solución de nuestra ecuación diferencial.

2) $r_1 = r_2 + m$ con m un entero positivo.
En este caso tenemos que

$$q(r) = (r - r_1)(r - r_2)\,,$$

y poniendo $c_0(r) = r - r_2$ y obtenemos

$$\begin{array}{rcll} d_1(r_2) & = & c_1(r_2) & = 0 \\ \vdots & & & \\ d_{m-1}(r_2) & = & c_{m-1}(r_2) & = 0 \quad \text{y} \\ d_m(r_2) & = & 0 & . \end{array}$$

Luego

$$d_m(r) = (r - r_2)\tilde{d}_m(r) \quad \text{y} \quad c_m(r) = \frac{-(r - r_2)\tilde{d}_m(r)}{(r + m - r_1)(r + m - r_2)},$$

y por lo tanto

$$c_m(r_2) \;=\; \lim_{r \to r_2} c_m(r) = \frac{-\tilde{d}_m(r)}{m}.$$

De esta forma todos los $c_k(r_2)$ y los $c_k(r)$ con r cercano a r_2 pueden calcularse de modo que si

$$\psi(x, r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k \quad \text{con} \quad c_0(r) = r - r_2\,,$$

entonces

$$L(\psi)(x, r) \;=\; c_0(r)q(r)x^r \;=\; (r - r_2)q(r)x^r\,.$$

Pero como $c_0(r_2) = c_1(r_2) = \cdots = c_{m-1}(r_2) = 0$, no es difícil de demostrar que la solución

$$\psi(x) \;=\; \psi(x, r_2) \;=\; x^{r_2} x^m \sigma(x) \;=\; x^{r_1}\sigma(x)$$

es linealmente dependiente con $\phi_1(x)$. Para encontrar una solución linealmente independiente con $\phi_1(x)$, derivamos $L(\psi)(x, r) = (r - r_2)q(r)x^r$ con respecto a r, obteniéndose

$$L\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)(x, r) \;=\; \frac{\partial}{\partial r} L(\psi)(x, r) \;=\; q(r)x^r + (r - r_2)[q'(r) + \ln(x)q(r)]x^r\,.$$

Por lo tanto

$$\phi_2(x) \;=\; \frac{\partial \psi}{\partial r}(x, r_2)$$

es solución de nuestra ecuación.
Observe que

$$\begin{array}{rcl} \phi_2(x) & = & x^{r_2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(r_2) x^k \;+\; \ln(x) x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_2) x^k\,, \qquad \text{es decir} \\ \phi_2(x) & = & x^{r_2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(r_2) x^k \;+\; c\ln(x)\phi_1(x)\,, \end{array}$$

para cierta constante $c \in \mathbb{R}$ (c podrá ser cero).

Resumiendo tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.6.4 *Consideremos la ecuación*

$$x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y \ = \ 0\,,$$

donde las funciones $a(x)$ y $b(x)$ tienen desarrollo en series de potencias (centradas en cero) convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$, $\rho_0 > 0$. Suponga que las raíces r_1, r_2 del polinomio indicial

$$q(r) \ = \ r(r-1) + a(0)r + b(0)$$

son reales y verifican $r_1 \geq r_2$.
Si $r_1 = r_2$, existen dos soluciones $\phi_1(x), \phi_2(x)$ definidas y linealmente independientes para $0 < \mid x \mid < \rho_0$, las cuales son de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \ \mid x \mid^{r_1} \sigma_1(x)\,, \\ \phi_2(x) &= \ \mid x \mid^{r_1+1} \sigma_2(x) + \ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,, \end{aligned}$$

donde $\sigma_1(x)$ y $\sigma_2(x)$ son series de potencias (centradas en cero y convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$) con $\sigma_1(0) \neq 0$.
Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, existen dos soluciones $\phi_1(x), \phi_2(x)$ definidas y linealmente independientes para $0 < \mid x \mid < \rho_0$, las cuales son de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \ \mid x \mid^{r_1} \sigma_1(x)\,, \\ \phi_2(x) &= \ \mid x \mid^{r_2} \sigma_2(x) + c\ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,, \end{aligned}$$

donde $\sigma_1(x)$ y $\sigma_2(x)$ son series de potencias (centradas en cero y convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$) con $\sigma_1(0) \neq 0 \neq \sigma_2(0)$ y $c \in \mathbb{R}$ es una constante (que puede ser cero).
Finalmente si las raíces del polinomio indicial son complejas, digamos $r_1 = \alpha + \imath\beta$, $r_2 = \alpha - \imath\beta$, $\beta \neq 0$, existen soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \ \mid x \mid^{\alpha} \cos(\beta \ln(\mid x \mid))(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k)\,, \\ \phi_2(x) &= \ \mid x \mid^{\alpha}\, sen(\beta \ln(\mid x \mid))(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k x^k)\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.6.5 Considere la ecuación

$$L(y) \ = \ x^2y'' + 3xy' + (1+x)y \ = \ 0\,.$$

Tenemos $a(x) = 3$ y $b(x) = 1 + x$. Luego el polinomio indicial es

$$q(r) \ = \ r(r-1) + 3r + 1 \ = \ (r+1)^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = r_2 = -1$.
Sea

$$\phi(x) \ = \ \phi(x, r) \ = \ x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x\phi(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = x^r \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k \,, \\ 3x\phi'(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} 3(k+r) c_k x^k \,, \\ x^2\phi''(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k \,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$L(\phi)(x,r) = c_0 x^r q(r) + \sum_{k=0}^{\infty} [q(r+k)c_k + c_{k-1}] x^k \,.$$

Para todo r cercano a $r_1 = -1$, $q(r+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$. Luego poniendo

$$c_k(r) = \frac{-c_{k-1}}{q(r+k)}$$

obtenemos

$$L(\phi)(x,r) = c_0 x^r q(r) \,.$$

Para estos r's, poniendo $c_0(r) = 1$, de la fórmula de recurrencia de los c_k se puede deducir

$$c_k(r) = \frac{(-1)^k}{q(r+1)q(r+2)\cdots q(r+k)} = \frac{(-1)^k}{(r+2)^2(r+3)^2\cdots(r+k+1)^2} \,.$$

Por lo tanto

$$c_k(r_1) = \frac{(-1)^k}{1^2\cdot 2^2\cdots k^2} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}$$

y

$$\phi_1(x) = x^{-1}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} x^k] \,.$$

Observe además que

$$\begin{aligned} c_k'(r) &= (-1)^k(-2)[\ \frac{1}{(r+2)^3}\frac{1}{(r+3)^2}\cdots\frac{1}{(r+k)^2} + \\ &\qquad \frac{1}{(r+2)^2}\frac{1}{(r+3)^3}\cdots\frac{1}{(r+k)^2} + \\ &\qquad \frac{1}{(r+2)^2}\frac{1}{(r+3)^2}\cdots\frac{1}{(r+k)^3}\ ] \\ &= (-2)c_k(r)[\ \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+3} + \cdots \frac{1}{r+k}\ ] \end{aligned}$$

lo que implica

$$c'_k(r_1) \;=\; \frac{(-2)(-1)^k}{(k!)^2}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}]\cdot$$

Por lo tanto

$$\phi_2(x) \;=\; (-2)x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k})x^k \quad + \quad \ln(\mid x\mid)\phi_1(x)\,,$$

y la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x)+b\phi_2(x)\,, \quad a,b\in\mathbb{R}\,,$$

la cual está definida para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

6.7 Ecuación de Bessel y funciones de Bessel

Para cada $p\in\mathbb{R}$, $p\geq 0$, consideremos la ecuación de Bessel de orden p

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y \;=\; 0\,.$$

Se llama **función de Bessel** a toda solución de esta ecuación. Estas aparecen en problemas sobre vibraciones de una cadena colgante (Daniel Bernoulli), vibraciones de una membrana circular (Euler), movimiento de planetas (Bessel), propagación de ondas, elasticidad, movimiento de fluidos, teoría del potencial, etc.

Ya sabemos que esta ecuación tiene a $x=0$ como único punto singular y que este es regular. Para resolverla alrededor de $x=0$ usando el método de Frobenious calculamos primeramente su polinomio indicial

$$q(r) \;=\; r(r-1)+r-p^2 \;=\; r^2-p^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1=p$ y $r_2=-p$.
Buscamos entonces un solución $\phi(x)$ de la forma

$$\phi(x) \;=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\,.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
-p^2\phi(x) &= x^r(-p^2c_0-p^2c_1x+\sum_{k=2}^{\infty}-p^2c_kx^k)\,,\\
x^2\phi(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2} \;=\; x^r\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}x^k\,,\\
x\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^k \;=\; x^r(rc_0+(r+1)c_1x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+r)c_kx^k)\,,\\
x^2\phi''(x) &= x^r(r(r-1)c_0+(r+1)rc_1x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^k)\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de Bessel obtenemos

$$x^r(c_0q(r) + c_1q(r+1)x + \sum_{k=2}^{\infty}[q(r+k)c_k + c_{k-2}]x^k \;=\; 0\,.$$

Asumiendo para r los valores $\pm p$, con $p \neq \frac{1}{2}$, tenemos que $q(r+1)$ es no nulo. Por lo tanto asumimos $c_1 = 0$, inclusive para $p = \frac{1}{2}$. Para anular los coeficientes correspondientes a $k \geq 2$ debemos tener

$$c_k(r) \;=\; \frac{-c_{k-2}(r)}{q(r+k)} \;=\; \frac{-c_{k-2}(r)}{(r+k)^2 - p^2} \;=\; \frac{-c_{k-2}(r)}{(r+k+p)(r+k-p)}\,.$$

Los primeros $c_k(r)$ son:

$$\begin{aligned}
c_2(r) &= \frac{-c_0(r)}{(r+p+2)(r-p+2)}\\
c_3(r) &= 0\\
c_4(r) &= \frac{-c_2(r)}{(r+p+4)(r-p+4)} \;=\; \frac{c_0(r)}{(r+p+2)(r+p+4)(r-p+2)(r-p+4)}\\
c_5(r) &= 0\\
c_6(r) &= \frac{-c_4(r)}{(r+p+6)(r-p+6)}\\
&= \frac{-c_0(r)}{(r+p+2)(r+p+4)(r+p+6)(r-p+2)(r-p+4)(r-p+6)}
\end{aligned}$$

de lo que se deduce

$$\begin{aligned}
c_{2k-1}(r) &= 0 \quad \text{y}\\
c_{2k} &= \frac{(-1)^k c_0(r)}{(r+p+2)(r+p+4)\cdots(r+p+2k)(r-p+2)(r-p+4)\cdots(r-p+2k)}
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$.
Luego para $r = r_1 = p$ y todo $k \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
c_{2k}(r_1) &= \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{(2p+2)(2p+4)\cdots(2p+2k)2\cdot 4\cdots 2k}\\
&= \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}\,.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\phi_1(x) \;=\; x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)} x^{2k}$$

es una función Bessel.

Para elegir $c_0(r)$ de modo que $\phi_1(x)$ sea la llamada función de Bessel de orden p de primera clase, debemos hacer algunos recuerdos sobre la función gamma de Euler.

Recuerdos de la función Gamma.
Para $q > 0$ está definida por la fórmula

$$\Gamma(q) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{q-1}\, dt\,.$$

y tiene la siguientes propiedades

$$\lim_{q\to 0^+} \Gamma(q) \;=\; +\infty \tag{6.6}$$

$$\Gamma(1) \;=\; 1 \tag{6.7}$$

$$\Gamma(q+1) \;=\; q\,\Gamma(q) \tag{6.8}$$

$$\Gamma(k+1) \;=\; k! \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \cup \{0\} \tag{6.9}$$

Para $-1 < q < 0$ tenemos $0 < q+1 < 1$ y por lo tanto $\Gamma(q+1)$ está bien definido. Usando esto y (6.8) se define para $-1 < q < 0$

$$\Gamma(q) \;=\; \frac{\Gamma(q+1)}{q}\,. \tag{6.10}$$

Teniendo así definido $\Gamma(q)$ para $-1 < q < 0$, podemos usar la misma fórmula (6.10) para definir Γ en el intervalo] -2, -1[. De esta forma podemos definir Γ para todo número negativo que no es un entero preservando la propiedad (6.8). Además se puede demostrar que

$$\lim_{q\to 0^-} \Gamma(q) \;=\; -\infty \quad \text{y} \tag{6.11}$$

$$\lim_{q\to k^{\pm}} |\,\Gamma(q)\,| \;=\; +\infty \quad \text{para todo entero negativo } k \tag{6.12}$$

Volviendo a la ecuación de Bessel, pongamos

$$c_0(r_1) = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}\,.$$

Con este valor de $c_0(r_1)$, usando reiteradas veces (6.8), obtenemos

$$c_{2k}(r_1) \;=\; \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\; k!\;\Gamma(k+p+1)}\,,$$

y la solución $\phi_1(x)$ que se denota por $J_p(x)$ que asume la forma

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\;(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!\;\Gamma(k+p+1)}$$

se denomina **función de Bessel de primera clase de orden** p.
Observe que como la ecuación de Bessel no tiene otros puntos singulares la función de Bessel $J_p(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

Para $r = r_2 = -p$ y todo $k \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} c_{2k}(r_2) &= \frac{(-1)^k c_0(r_2)}{2 \cdot 4 \cdots 2k(-2p+2)(-2p+4)\cdots(-2p+2k)} \\ &= \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k} k!(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k)} \,. \end{aligned}$$

Para que todos los $c_k(r_2)$ estén definidos imponemos la condición $p \notin \mathbb{Z}^+$.
Así tenemos la solución

$$\phi_2(x) \;=\; x^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k} k!(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k)} x^{2k} \,.$$

Poniendo

$$c_0(r_2) = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)} \,,$$

obtenemos

$$c_{2k}(r_2) \;=\; \frac{(-1)^k}{2^{2k-p}\; k!\; \Gamma(k-p+1)} \,,$$

y la solución $\phi_2(x)$ que se denota por $J_{-p}(x)$ y que asume la forma

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k-p}}{k! \; \Gamma(k-p+1)}$$

se denomina **función de Bessel de primera clase de orden** $-p$.
Esta función de Bessel $J_p(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Además $J_p(0) = 0$, lo que implica que $J_p(x)$ es acotada para $x > 0$ cercano a cero. Por otra parte el primer término de $J_{-p}(x)$ es

$$\frac{(\frac{x}{2})^{-p}}{\Gamma(-p+1)} \,,$$

lo que implica que $J_{-p}(x)$ no es acotada para $x > 0$ cercano a cero.
Luego bajo nuestra condición: p no es cero ni un entero positivo, las soluciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^+$ y la solución general es

$$\phi(x) \;=\; aJ_p(x) \;+\; J_{-p}(x) \,, \quad a, b \in \mathbb{R} \,.$$

Caso p es un entero no negativo.
Sea $p \geq 0$ un entero. Tenemos

$$J_p(x) \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k+p}}{k! \; (k+p)!} \, .$$

Observe que (6.12) implica

$$\lim_{q \to p} \mid \Gamma(-q+k+1) \mid = +\infty \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, p-1$$

Por lo tanto en la serie que define a $J_{-p}(x)$ los coeficientes correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, p-1$ son cero. Así

$$\begin{aligned} J_{-p}(x) \; &= \; \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k-p}}{k! \; (k-p)!} \\ &= \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p} \; (\frac{x}{2})^{2(k+p)-p}}{(k+p)! \; (k+p-p)!} \\ &= \; (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k+p}}{k! \; (k+p)!} \\ &= \; (-1)^p \; J_p(x) \, . \end{aligned}$$

Por lo tanto $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente dependientes. Para encontrar una función de Bessel linealmente independiente con $J_p(x)$, definimos para $q > 0$ que no es un entero

$$Y_q(x) \; = \; \frac{J_q(x) \cos(q\pi) - J_{-q}(x)}{\text{sen}(q\pi)} \, .$$

Esta función de Bessel es llamada **función de Bessel de segunda clase de orden** q y es linealmente independiente con $J_q(x)$ para todo $q > 0$ que no es un entero.
Si en la fracción que define a $Y_q(x)$ ponemos $q = p$, tanto el numerador como el denominador se anulan. Usando L'Hopital se puede demostrar que

$$Y_p(x) \; = \; \lim_{q \to p} Y_q(x)$$

está bien definida y que es una función de Bessel linealmente independiente con $J_p(x)$. Por lo tanto, en este caso, la solución general es

$$\phi(x) \; = \; aJ_p(x) \; + \; bY_p(x) \, , \quad a, b \in \mathbb{R} \, .$$

Ejercicios.

1) $\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] \; = \; x^p J_{p-1}(x) \quad .$

2) $\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)] \;=\; -x^{-p}J_{p+1}(x)$.

3) $J_p'(x) + \frac{p}{x}J_p(x) \;=\; J_{p-1}(x)$.

4) $J_p'(x) - \frac{p}{x}J_p(x) \;=\; -J_{p+1}(x)$.

5) $J_p'(x) \;=\; \frac{1}{2}[J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)]$.

6) $J_p(x) \;=\; \frac{x}{2p}[J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)]$.

7) Demuestre que el cambio de coordenadas $y = x^{-\frac{1}{2}}u$ transforma la ecuación de Bessel de orden p en la ecuación

$$u'' + (1 + \frac{1-4p^2}{4x^2})u \;=\; 0\,.$$

8) Demuestre que $J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\text{sen}(x)$.

9) Demuestre que $J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$.

Soluciones.

1) Tenemos

$$\begin{aligned} x^pJ_p(x) &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!\;\Gamma(k+p+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;x^{2(k+p)}}{2^{2k+p}\;k!\;\Gamma(k+p+1)} \end{aligned}$$

Derivando con respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;2(k+p)\;x^{2(k+p)-1}}{2^{2k+p}\;k!\;\Gamma(k+p+1)} \\ &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;x^{2(k+p)-1-p}}{2^{2k+p-1}\;k!\;\frac{\Gamma(k+p+1)}{k+p}} \\ &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(\frac{x}{2})^{2k+p-1}}{k!\;\Gamma(k+p)} \\ &= x^pJ_{p-1}(x)\,. \end{aligned}$$

2) Se demuestra de la misma forma que 1) y se deja de ejercicio.
3) De 1) tenemos

$$x^pJ_p'(x) \;+\; px^{p-1}J_p(x) \;=\; x^pJ_{p-1}(x)\,,$$

y nuestro resultado se obtiene multiplicando por x^{-p}.

4) Se demuestra de la misma forma que 3) y se deja de ejercicio.
5) Se demuestra sumando las ecuaciones 3) y 4).
6) Se demuestra restando las ecuaciones 3) y 4).
7) Tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-\frac{1}{2}}u(x)\,, \\ y'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}u(x) + x^{-\frac{1}{2}}u'(x)\,, \\ y''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}u(x) - x^{-\frac{3}{2}}u'(x) + x^{-\frac{1}{2}}u''(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -p^2y(x) &= -p^2x^{-\frac{1}{2}}u(x)\,, \\ x^2y(x) &= x^{\frac{3}{2}}u(x)\,, \\ xy'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u(x) + x^{\frac{1}{2}}u'(x)\,, \\ x^2y''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}u(x) - x^{\frac{1}{2}}u'(x) + x^{\frac{3}{2}}u''(x)\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de Bessel se obtiene

$$\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}u(x) - x^{\frac{1}{2}}u'(x) + x^{\frac{3}{2}}u''(x) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u(x) + x^{\frac{1}{2}}u'(x) + x^{\frac{3}{2}}u(x) - p^2x^{-\frac{1}{2}}u(x) \;=\; 0\,.$$

Reordenando

$$x^{\frac{3}{2}}u''(x) + (-x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})u'(x) + (\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - p^2x^{-\frac{1}{2}})u(x) \;=\; 0\,,$$

o lo que es lo mismo

$$x^{\frac{3}{2}}u''(x) + (x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(1-4p^2)x^{-\frac{1}{2}})u(x) \;=\; 0\,.$$

Finalmente multiplicando por $x^{-\frac{3}{2}}$ obtenemos

$$u''(x) + (1 + \frac{1}{4}(1-4p^2)x^{-2})u(x) \;=\; 0\,.$$

8) Para $p = \frac{1}{2}$ el cambio de coordenadas $y = x^{-\frac{1}{2}}u$ anterior nos da la ecuación

$$u'' + u = 0\,,$$

cuya solución general es

$$u(x) \;=\; c_1\cos(x) + c_2\mathrm{sen}(x)\,.$$

Por lo tanto las funciones

$$\phi_1(x) \;=\; x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(x) \quad \text{y} \quad \phi_2(x) \;=\; x^{-\frac{1}{2}}\cos(x)\,,$$

son soluciones de nuestra ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$.
Observe que como

$$\lim_{x\to 0^+} J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; 0 \;=\; \lim_{x\to 0^+}\phi_1(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=+\infty \;=\; \lim_{x\to 0^+}\phi_2(x)\,,$$

tenemos que existe constante A tales que

$$J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; A\phi_1(x)\,.$$

Además

$$\begin{aligned} J'_{\frac{1}{2}}(x) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(2k+\frac{1}{2})\;(\frac{x}{2})^{2k-\frac{1}{2}}\;\frac{1}{2}}{k!\;\Gamma(k+\frac{3}{2})} \\ &=\; \frac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(2k+\frac{1}{2})\;(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\;(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi'_1(x) \;&=\; x^{-\frac{1}{2}}\cos(x) - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{sen}(x) \\ &=\; x^{-\frac{1}{2}}(\cos(x) - \frac{1}{2}x^{-1}\mathrm{sen}(x))\,. \end{aligned}$$

Luego si llamamos

$$M(x) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(2k+\frac{1}{2})\;(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\;(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})} \;=\; A(\cos(x) - \frac{1}{2}x^{-1}\mathrm{sen}(x))\,,$$

debemos tener

$$M(0) \;=\; \frac{\sqrt{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \;=\; A\frac{1}{2}\,.$$

Como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, concluimos que $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, lo que implica

$$J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{sen}(x)\,.$$

9) Como

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\;\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,,$$

y en el desarrollo en serie de potencias centrada en cero de la función $\operatorname{sen}(x)$ (resp. $\cos(x)$) aparecen solo potencias impares de x (resp. solo potencias pares de x) existe constante B tal que

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; B\phi_2(x)\,.$$

Si llamamos

$$N(x) \;=\; \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\;\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,,$$

debemos tener

$$N(0) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \;=\; B\,.$$

Por lo tanto

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)\,.$$

6.8 Ecuación Hipergeométrica de Gauss

Para a, b, c constantes reales, se llama **ecuación hipergeométrica de Gauss** a la ecuación

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby \;=\; 0\,.$$

Supondremos desde el inicio que $c \neq 0$ y $c \neq a+b+1$. Bajo estas condiciones las funciones

$$P(x) \;=\; \frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \quad \text{y} \quad Q(x) \;=\; \frac{-ab}{x(1-x)}\,,$$

solo no son analíticas en los puntos $x=0$ y $x=1$. Por lo tanto estos son los únicos puntos singulares de nuestra ecuación.
Como las funciones

$$a(x) \;=\; xP(x) \;=\; \frac{c-(a+b+1)x}{1-x} \quad \text{y} \quad b(x) \;=\; x^2Q(x) \;=\; \frac{-abx}{1-x}\,,$$

son analíticas en $x=0$, este es un punto singular regular.

Ejercicio. El punto $x=1$ es punto singular regular.

Busquemos primero la solución general alrededor de $x=0$. El correspondiente polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1)+a(0)r+b(0) \;= r(r-1)+cr \;=\; r(r-1+c)\,.$$

Examinemos las condiciones que deben cumplirse para que tengamos una solución asociada a $r=0$, es decir, para que tengamos una solución de la forma

$$\phi(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,.$$

Estas son $r_1 = 0$ (es decir $0 \geq 1 - c \iff c \geq 1$), o $r_2 = 0$ (es decir $c \leq 1$) y $r_1 - r_2 = 1 - c$ no es un entero positivo (es decir c no es cero ni un entero negativo). Luego la condición es

$$c \notin \{0\} \cup \mathbb{Z}^- . \tag{6.13}$$

Bajo esta condición y con $\phi(x)$ definido como arriba, tenemos

$$\begin{aligned}
-ab\phi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} -abc_k x^k \\
-(a+b+1)x\phi'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} -k(a+b+1)c_k x^k \\
c\phi'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} ckc_k x^{k-1} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} c(k+1)c_{k+1}x^k \\
-x^2\phi''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} -k(k-1)c_k x^k \\
x\phi''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kc_{k+1}x^k .
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}([(k+1)k + c(k+1)]c_{k+1} + [-k(k-1) - (a+b+1)k - ab]c_k)x^k \ = \ 0 .$$

Luego para todo $k \geq 0$ debemos tener

$$[(k+1)k + c(k+1)]c_{k+1} + [-k(k-1) - (a+b+1)k - ab]c_k \ = \ 0 ,$$

o lo que es lo mismo

$$(k+1)(k+c)c_{k+1} - (k+a)(k+b)c_k \ = \ 0 .$$

Esto implica

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)}c_k \\
&= \frac{(a+k)(a+k-1)(b+k)(b+k-1)}{(k+1)k(c+k)(c+k-1)}c_{k-1} \\
&\ \vdots \\
&= \frac{(a+k)(a+k-1)\cdots(a+1)a(b+k)(b+k-1)\cdots(b+1)b}{(k+1)k\cdots 2\cdot 1(c+k)(c+k-1)\cdots(c+1)c}c_0 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto si ponemos $c_0 = 1$, tenemos para todo $k \geq 1$

$$c_k \ = \ \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\, c(c+1)\cdots(c+k-1)} ,$$

y nuestra solución es

$$\phi_1(x) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\; c(c+1)\cdots(c+k-1)} x^k \cdot$$

Esta serie se conoce como la **serie hipergeométrica** y se denota por

$$F(a,b,c,x) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\; c(c+1)\cdots(c+k-1)} x^k \cdot$$

Observaciones 6.8.1 1. Cuando $a = 1$ y $b = c$ tenemos

$$F(1,b,b,x) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \,.$$

Por lo tanto para todo $| \, x \, | < 1$

$$F(1,b,b,x) \;=\; \frac{1}{1-x} \cdot$$

2. Si a o b son un entero negativo o cero, la serie hipergeométrica se reduce a un polinomio, y por lo tanto converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Si a o b no son un entero negativo ni cero, la serie hipergeométrica converge sólo para $| \, x \, | < 1$.

4. Luego para $| \, x \, | < 1$, $F(a,b,c,x)$ es una función analítica, que se denomina **función hipergeométrica**.

5. Tenemos $F(a,b,c,x) = F(b,a,c,x)$.

Determinemos ahora bajo que condiciones tenemos una solución asociada a la raíz $1 - c \neq 0$ del polinomio indicial.
Esto sucede cuando $r_1 = 1 - c$ (es decir, cuando $1 - c > 0 \iff c < 1$) o cuando $r_2 = 1 - c$ (es decir $c > 1$) y $r_1 - r_2 = c - 1$ no es un entero positivo ni cero (es decir, c no es un entero positivo).
Luego la condición es

$$c \notin \mathbb{Z}^+ \,. \tag{6.14}$$

Luego asociada a la condición (6.14) tenemos una solución de la forma

$$\phi_2(x) \;=\; x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k x^k \,, \quad \tilde{c}_0 \neq 0 \,.$$

donde los $\tilde{c}_k$ pueden encontrarse sustituyendo en la ecuación.
Otra manera de encontrarlos, es hacer el cambio de coordenadas

$$y = x^{1-c} z \,,$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} y' &= (1-c)x^{-c}z + x^{1-c}z' \\ y'' &= -c(1-c)x^{-c-1}z + 2(1-c)x^{-c}z' + x^{1-c}z''\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-x)[\,-c(1-c)x^{-c-1}z + 2(1-c)x^{-c}z' + x^{1-c}z''] + \\ &\quad [c-(a+b+1)x][(1-c)x^{-c}z + x^{1-c}z'] - abx^{1-c}z \\ &= x^{1-c}x(1-x)z'' + [x(1-x)2(1-c)x^{-c} + (c-(a+b+1)x)x^{1-c}]z' + \\ &\quad [\,-c(1-c)x(1-x)x^{-c-1} + (1-c)x^{-c}(c-(a+b+1)x) - abx^{1-c}]z\,. \end{aligned}$$

Multiplicando por x^{c-1} se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-x)z'' + [2(1-c)(1-x) + c - (a+b+1)x]z' + \\ &= [\,-c(1-c)(1-x)x^{-1} + (1-c)cx^{-1} - (1-c)(a+b+1) - ab]z\,, \end{aligned}$$

o bien

$$x(1-x)z'' + [2-c-((a-c+1)+(b-c+1)+1)x]z' - (a-c+1)(b-c+1)z \;=\; 0\,.$$

Observe que esta última ecuación es la ecuación hipergeomértrica con las constantes a, b, c sustituidas por $a-c+1, b-c+1, 2-c$, respectivamente. Además como la condición (6.14) para c implica la condición (6.13) para $2-c$, tenemos que

$$z(x) \;=\; F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

es solución alrededor de $x=0$ de la ecuación transformada.
Por lo tanto

$$\phi_2(x) \;= \mid x \mid^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

es solución de la ecuación original alrededor de $x=0$.
Así bajo la condición

$$c \notin \mathbb{Z}$$

(que es la condición (6.13) más la condición (6.14))
tenemos que la solución general alrededor de $x=0$ es

$$\phi(x) \;=\; c_1 F(a,b,c,x) \;+\; c_2 \mid x \mid^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

la cual está definida para $0 <\mid x \mid< 1$.

Para resolver alrededor de $x=1$, hacemos el cambio de coordenadas $t = 1-x$. Observemos que este cambio lleva $x=1$ en $t=0$ y que $\frac{dt}{dx} = -1$. Luego reemplazando en la ecuación nos queda

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + [a+b-c+1-(a+b+1)t]\frac{dy}{dt} - aby \;=\; 0\,.$$

Luego si $c-a-b$ no es un entero, la solución general de la ecuación transformada alrededor de $t=0$ es

$$\phi(t) = c_1 F(a,b,a+b-c+1,t) + c_2 \mid t \mid^{c-a-b} F(c-b,c-a,c-a-b+1,t)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

y está definida para $0 < \mid t \mid < 1$. Por lo tanto la solución general alrededor de $x=1$ de la ecuación hipergeométrica original es

$$\phi(x) = c_1 F(a,b,a+b-c+1,1-x) + c_2 \mid 1-x \mid^{c-a-b} F(c-b,c-a,c-a-b+1,1-x)\,,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y está definida para $0 < \mid 1-x \mid < 1$, es decir para x en $]0, 2[$ - $\{1\}$.