

## 5.5 Problemas resueltos del Capítulo 5

**Ejercicio 5.5.1** Un hombre se desplaza en dirección norte con velocidad constante de  $v_1$  metros por segundo. En el instante inicial llama a su perro que se encuentra a 100 metros al este de él. Si el perro corre con velocidad  $v_2 = 2v_1$  dirigido a cada instante a su dueño, determine la trayectoria descrita por el perro y el tiempo en que tarda en alcanzar a su amo.

**Solución.** Supongamos que inicialmente el hombre se encuentra en el origen y que el perro se encuentra en el punto  $(100, 0)$ . Sea  $P = (x, y)$  la posición del perro en el instante  $t$ . En ese mismo instante el hombre se encuentra en  $H = (0, v_1 t)$ .

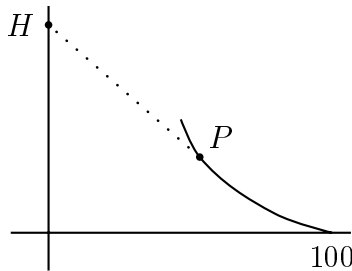


Figura 33

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - v_1 t}{x} \implies t = \frac{1}{v_1}(y - xy').$$

La longitud de la curva  $y = y(x)$  que describe la trayectoria del perro entre el punto  $(100, 0)$  y  $P$  es

$$v_2 t = \int_x^{100} \sqrt{1 + y'(u)^2} du \implies \frac{v_2}{v_1}(y - xy') = \int_x^{100} \sqrt{1 + y'(u)^2} du.$$

Derivando con respecto a  $x$  y usando que  $v_2 = 2v_1$ , nos queda

$$2(-xy'') = -\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Poniendo  $p = y'$ , que implica  $p' = y''$ , y reemplazando obtenemos

$$\frac{2dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Al integrar se tiene

$$2 \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \ln(x) + \ln(c) \implies p + \sqrt{1 + p^2} = c \cdot \sqrt{x}.$$

Como en  $x = 100$ , tenemos  $y = 0$  y  $y' = 0$ , debemos tener  $c = \frac{1}{10}$ , y luego

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{\sqrt{x}}{10}.$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{x}}{10} - \frac{10}{\sqrt{x}} \right],$$

e integrando

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2} \int_{100}^x \left[ \frac{\sqrt{u}}{10} - \frac{10}{\sqrt{u}} \right] du = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{15} - 20\sqrt{u} \right] \Big|_{100}^x \\ &= \frac{1}{30} x^{\frac{3}{2}} - 10\sqrt{x} + \frac{200}{3}. \end{aligned}$$

De esta forma

$$y(0) = \frac{200}{3}$$

y el tiempo en que tarda en alcanzar a su amo es

$$\frac{200}{3v_1} \text{ segundos.}$$

**Ejercicio 5.5.2** Un cuerpo de 8 libras de peso cae desde el reposo hacia la tierra desde gran altura. A medida que cae, la resistencia del aire actúa sobre él. Suponga que esta resistencia en libras, equivale numéricamente al doble de la velocidad, en pies por segundos. Determine la velocidad y la distancia de caída en el tiempo  $t$ . Considere  $g = 32(\text{pies}/\text{seg}^2)$ . Analice las funciones resultantes en el caso que  $t \rightarrow \infty$ .

**Solución.** Por la Segunda Ley de Newton se tiene

$$m \frac{dv}{dt} = F_1 + F_2,$$

donde

$$m = \frac{W}{g} = \frac{\text{peso}}{g} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4},$$

$$F_1 = \text{fuerza de empuje} = mg = 8,$$

y

$$F_2 = \text{fuerza de resistencia} = -2v.$$

Por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{1}{4} \frac{dv}{dt} = 8 - 2v.$$

Separando variables y multiplicando por 4 obtenemos

$$\frac{dv}{4-v} = 8 dt,$$

e integrando

$$-\ln|4 - v| = 8t - \ln(c) \implies 4 - v = ce^{-8t}.$$

Como  $v(0) = 0$ , debemos tener  $c = 4$  y luego  $v(t) = 4(1 - e^{-8t})$ .

Para conocer la distancia recorrida en el tiempo  $t$ , pongamos  $v = \frac{dx}{dt}$  con  $x(0) = 0$ . Obtenemos así la ecuación

$$\begin{aligned} dx &= 4(1 - e^{-8t}) dt \quad \text{cuya solución es} \\ x(t) &= 4 \left[ t + \frac{e^{-8t}}{8} \right] + c_1 \quad \text{y como } x(0) = 0 \implies c_1 = -\frac{1}{2} \\ x(t) &= 4 \left[ t + \frac{e^{-8t}}{8} - \frac{1}{8} \right]. \end{aligned}$$

### Conclusiones.

a) Como  $v(t) = 4(1 - e^{-8t})$ , se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 4$ .

b) Como  $x(t) = 4 \left[ t + \frac{1}{8}e^{-8t} - \frac{1}{8} \right]$ , se tiene que  $x \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow \infty$ .

Esto no implica que el movimiento será eterno. Al llegar a la superficie esta solución no funciona.

**Ejercicio 5.5.3** Una barcaza está siendo remolcada a 16 pies/seg. Cuando se revienta la cuerda que tira de ella, a partir de ese momento, continúa su movimiento en línea recta, pero frenándose con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad instantánea. Si después de dos minutos de que se revienta la cuerda se observa que la velocidad de la barcaza es de 9 pies/seg, ¿qué distancia recorrerá antes de quedar en reposo?

**Solución.** Se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v} \quad \text{con las condiciones} \quad \begin{cases} x(0) &= 0, \\ v(0) &= 16 \text{ pies/seg}, \\ v(120) &= 9 \text{ pies/seg}. \end{cases}$$

Integrando la ecuación se obtiene

$$2\sqrt{v} = -kt + c_1.$$

Como  $v(0) = 16$ , debemos tener  $c_1 = 8$ , y por lo tanto

$$\sqrt{v} = -\frac{k}{2}t + 4.$$

Pero

$$v(120) = 9 \implies 3 = -60k + 4 \implies k = \frac{1}{60},$$

y luego

$$\sqrt{v} = 4 - \frac{t}{120}.$$

De esta forma

$$\frac{dx}{dt} = v = \left(4 - \frac{t}{120}\right)^2,$$

e integrando

$$x(t) = -\frac{120}{3} \left(4 - \frac{t}{120}\right)^3 + c_2 = -40 \left(4 - \frac{t}{120}\right)^3 + c_2.$$

La condición  $x(0) = 0$  implica  $c_2 = 40 \cdot 4^3 = 2.560$ , y tenemos

$$x(t) = -40 \left(4 - \frac{t}{120}\right)^3 + 2.560.$$

La barcaza estará en reposo cuando  $\frac{dx}{dt} = 0$ , luego esto sucederá a los  $t = 480$  segundos. Además como

$$x(480) = -40 \left(4 - \frac{480}{120}\right)^3 + 2.560 = 2.560 \text{ pies},$$

la distancia que recorre antes de quedar en reposo es de 2.560 pies.

**Ejercicio 5.5.4** Una partícula de masa  $m$  se desliza *hacia abajo* sobre un plano inclinado bajo la influencia de la gravedad. Si al movimiento se opone una fuerza  $f = kmv^2$  y  $\theta$  es el ángulo de inclinación del plano, encontrar:

- La velocidad de la partícula en función del tiempo, suponiendo que parte del reposo.
- El desplazamiento en función del tiempo si  $x(0) = 0$ .
- El tiempo necesario para que se desplace una distancia  $d$  desde el reposo.

**Solución.** La ecuación del movimiento es

$$m \frac{dv}{dt} = mg \operatorname{sen}(\theta) - kmv^2.$$

a) Separando variables obtenemos

$$\frac{dv}{A - v^2} = k dt, \quad \text{donde } A = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{sen}(\theta)}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dv}{v-A} - \frac{dv}{v+A} = -2Akd t.$$

Como  $v(0) = 0$ , integrando obtenemos

$$\ln(v(t) - A) - \ln(-A) - \ln(v + A) + \ln(A) = -2kAt,$$

y exponenciando

$$\frac{v(t) - A}{-A} \frac{A}{v(t) + A} = e^{-2kAt} \implies -\frac{v(t) - A}{v(t) + A} = e^{-2kAt}.$$

Despejando y reemplazando el valor de  $A$  se tiene

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k} \text{sen}(\theta)} \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}} = \sqrt{\frac{g}{k} \text{sen}(\theta)} \tanh(\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t).$$

b) Integrando la expresión anterior y usando que  $x(0) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{g}{k} \text{sen}(\theta)} \int_0^t \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} s}}{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} s}} ds \\ &= \sqrt{\frac{g}{k} \text{sen}(\theta)} \left( \int_0^t ds + \frac{1}{\sqrt{gk \text{sen}(\theta)}} \int_0^t \frac{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} s}}{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} s}} ds \right) \\ &= \sqrt{\frac{g}{k} \text{sen}(\theta)} \left( t + \frac{1}{\sqrt{gk \text{sen}(\theta)}} \ln\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left( \sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t + \ln\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left( \ln(e^{\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}) + \ln\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \ln\left(e^{\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t} \frac{1 + e^{-2\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{e^{\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t} + e^{-\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{k} \ln(\cosh(\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t)). \end{aligned}$$

c) Si  $x = d$

$$d = \frac{1}{k} \ln(\cosh(\sqrt{gk \text{sen}(\theta)} t))$$

lo que implica

$$t = \frac{\text{arccosh}(e^{kd})}{\sqrt{gk \text{sen}(\theta)}}.$$

**Ejercicio 5.5.5** Una pelota de 6 onzas de peso se lanza hacia arriba desde una altura de 7 pies con una velocidad inicial de 84 pies por segundo. Si la pelota está sujeta a una resistencia del aire igual a  $3/128$  (libras por segundo) de la velocidad de ella (pies por segundo) ¿ Que altura máxima alcanzará antes de regresar a la tierra? Datos: 1 libra = 16 onzas,  $g = 32$  pies por segundo al cuadrado.

**Solución.** Tenemos la ecuación

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{3}{128}v, \quad x(0) = 7, \quad v(0) = 84,$$

donde

$$mg = 6 \text{ onzas} = \frac{6}{16} \text{ lb} = \frac{3}{8} \text{ lb} \quad \implies \quad m = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{256}.$$

Reemplazando obtenemos

$$\frac{3}{256} \frac{dv}{dt} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{128}v \quad \implies \quad \frac{dv}{dt} + 2v = -32,$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\int 2dt} \left[ \int -32e^{\int 2dt} dt + c \right] \implies v(t) = e^{-2t} [-16e^{2t} + c] \\ &\implies v(t) = -16 + ce^{-2t}. \end{aligned}$$

Como  $v(0) = 84$  tenemos

$$84 = -16 + c \quad \implies \quad c = 100,$$

y entonces

$$v(t) = -16 + 100e^{-2t}.$$

Para calcular el tiempo  $t_0$  que se demora en alcanzar la altura máxima debemos resolver

$$v(t_0) = -16 + 100e^{-2t_0} = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{-2t_0} &= \frac{16}{100} = \frac{4}{25} \implies -2t_0 = \ln\left(\frac{4}{25}\right) = 2 \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ &\implies t_0 = -\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

También tenemos

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s) ds = 7 - 16t - 50(e^{-2t} - 1) = 57 - 16t - 50e^{-2t},$$

y luego la altura máxima es

$$\begin{aligned} x\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) &= 57 - 16 \ln\left(\frac{5}{2}\right) - 50e^{-2\ln\left(\frac{5}{2}\right)} = 57 - 50 \cdot \frac{4}{25} - 16 \ln\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 49 - 16 \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 34.3393 \text{ pies.} \end{aligned}$$

**Ejercicio 5.5.6** Una masa de 4 libras se suspende de un resorte ocasionando un estiramiento de 2 pie. En el instante  $t = 0$ , sin velocidad inicial la masa se desplaza 0.5 pie sobre su posición de equilibrio y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa equivalente a  $f(t) = 8\text{sen}(t)$  libras. Suponiendo que no hay resistencia del aire, encontrar la ecuación del movimiento resultante y la posición del objeto al cabo de  $\frac{\pi}{4}$  segundos. Considere  $g = 32 \frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}$ .

**Solución.** La constante de rigidez  $k$  del resorte verifica

$$2k = mg = 4$$

lo que implica  $k = 2 \frac{\text{lb}}{\text{pie}}$  y  $m = \frac{1}{8}$  Slugs.

Como el constante de amortiguación es nula, la ecuación del movimiento es

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m},$$

es decir

$$x'' + 16x = 64\text{sen}(t), \quad x(0) = -\frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0.$$

Aplicando transformada de Laplace y poniendo  $\mathcal{L}(x(t))(s) = X(s)$  obtenemos

$$s^2X(s) + \frac{1}{2}s + 16X(s) = \frac{64}{1 + s^2}.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{64}{(s^2 + 1)(s^2 + 4^2)} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 4^2} \\ &= \frac{64}{15} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{16}{15} \frac{4}{s^2 + 4^2} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 4^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t) = \frac{64}{15}\text{sen}(t) - \frac{16}{15}\text{sen}(4t) - \frac{1}{2}\cos(4t).$$

Luego

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 3.516989.$$

y el objeto está abajo de la posición de equilibrio.

**Ejercicio 5.5.7** Una masa de 2 kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire  $\frac{196}{125}$ m. al llegar al reposo en equilibrio. En el instante  $t = 0$ , la masa se desplaza 1 m. hacia abajo, y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa  $f(t) = \frac{195}{14} \cos(t)$  newton al sistema. Si la constante de amortiguación es 6 newton seg/m, determine el desplazamiento  $x(t)$  de la masa en un instante  $t > 0$  cualquiera. Considere  $g = 9.8\text{m/seg}^2$ .

**Solución.** Tenemos  $m = 2$  Kg y estiramiento  $\frac{196}{125}$ m. Luego la constante  $k$  del resorte es

$$k = 2 \cdot 9.8 \cdot \frac{125}{196} = \frac{125}{10}.$$

De esta forma nuestra ecuación diferencial es

$$x'' + 3x' + \frac{125}{20}x = \frac{195}{28} \cos(t).$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 3\lambda + \frac{125}{20} = 0,$$

cuyas raíces son

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm 2i.$$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = e^{-\frac{3}{2}t} [c_1 \cos(2t) + c_2 \text{sen}(2t)].$$

Para encontrar una solución particular de la no homogénea, usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución de la forma

$$x_p(t) = A \cos(t) + B \text{sen}(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -A \text{sen}(t) + B \cos(t), \\ x_p''(t) &= -A \cos(t) - B \text{sen}(t), \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\frac{195}{28} \cos(t) = [-A + 3B + \frac{125}{20}A] \cos(t) + [-B - 3A + \frac{125}{20}B] \text{sen}(t).$$

Tenemos entonces el sistema

$$\begin{cases} \frac{21}{4}A + 3B = \frac{195}{28} \\ -3A + \frac{21}{4}B = 0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$A = 1, \quad B = \frac{4}{7}.$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$x(t) = e^{-\frac{3}{2}t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)] + \cos(t) + \frac{4}{7}\operatorname{sen}(t).$$

Las condiciones  $x(0) = 1$  y  $x'(0) = 0$  implican respectivamente

$$c_1 + 1 = 1 \quad \text{y} \quad 2c_2 - \frac{3}{2}c_1 + \frac{4}{7} = 0.$$

Luego

$$c_1 = 0 \quad \text{y} \quad c_2 = -\frac{2}{7},$$

y nuestra solución es

$$x(t) = -\frac{2}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}(2t) + \cos(t) + \frac{4}{7}\operatorname{sen}(t).$$