4.4 Ejercicios resueltos del Capítulo 4

Ejercicio 4.4.1 .Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{1-x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x}\,y \;=\; 1-x\,,$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es $y_1(x) = e^x$.

Solución. Usando fórmula de Abel tenemos una segunda solución de la ecuación homogénea de la forma $y_2 = vy_1$, con

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{x}{1-x}dx} dx \\
&= \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{x}{x-1}dx} dx = \int e^{-2x} e^{x+\ln(x-1)} dx \\
&= \int e^{-x}(x-1)dx = \int x e^{-x} dx - \int e^{-x} dx = -xe^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $y_2(x) = -xe^{-x}e^x = -x$. De esta forma la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^x - c_2 x\,.$$

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p(x) = c_1(x) e^x - c_2(x) x\,.$$

Luego las funciones $c_1'(x), c_2'(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x - c_2'(x)x &= 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x) &= 1 - x\,. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} c_1'(x) = -xe^{-x} \quad &\Longrightarrow \quad c_1(x) = xe^{-x} + e^{-x} + c_1 \\ c_2'(x) = -1 \quad &\Longrightarrow \quad c_2(x) = -x + c_2\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = (xe^{-x} + e^{-x} + c_1)e^x - (-x + c_2)x\,,$$

o bien

$$y(x) = x^2 + x + 1 + c_1e^x - c_2x\,.$$

Ejercicio 4.4.2 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\,, \quad (x \neq 0)$$

sabiendo que $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

Solución. Para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, linealmente independiente con $y_1(x)$, usamos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) \;=\; y_1(x)\int e^{-\int p_1(x)dx}y_1(x)^{-2}dx\,,$$

con $p_1(x) = \frac{2}{x}$.
Como

$$-\int p_1(x)dx \;=\; -2\ln(x) \;=\; \ln(x^{-2})\,,$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \;=\; \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= -\frac{\cos(x)}{x}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) \;=\; c_1\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2\frac{\cos(x)}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea usamos el método de variación de constante. Sea

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x}\,.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1'(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2'(x)\frac{\cos(x)}{x} & = & 0 \\ c_1'(x)\frac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^2} + c_2'(x)\frac{-x\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{x^2} & = & \frac{1}{x} \end{array}\right\}\,.$$

Sus soluciones son

$$c_1'(x) \;=\; \cos(x)\,, \quad c_2'(x) \;=\; -\operatorname{sen}(x)\,,$$

e integrando obtenemos

$$c_1(x) \;=\; \operatorname{sen}(x) + c_1\,, \quad c_2(x) \;=\; \cos(x) + c_2\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) \;=\; (\operatorname{sen}(x) + c_1)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + (\cos(x) + c_2)\frac{\cos(x)}{x}$$

es decir

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x} \;+\; \frac{1}{x}\,\cdot$$

Ejercicio 4.4.3 Encuentre la solución general de la ecuación

$$4x^4\,\frac{d^2y}{dx^2} \;+\; 8x^3\,\frac{dy}{dx} \;+\; y \;=\; \tan\left(\frac{1}{2x}\right)\,,$$

haciendo la sustitución $x = \frac{1}{t}$.

Solución.Sea $x = \frac{1}{t}$. Por lo tanto

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{dt}{dx} = -t^2\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \;=\; -t^2\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) \;=\; \frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \;=\; \left(-2t\frac{dy}{dt} \;-\; t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cdot(-t^2) \\ &= 2t^3\frac{dy}{dt} \;+\; t^4\frac{d^2y}{dt^2}\,\cdot \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos

$$4\frac{1}{t^4}\left(2t^3\frac{dy}{dt} \;+\; t^4\frac{d^2y}{dt^2}\right) \;-\; 8\frac{1}{t^3}t^2\frac{dy}{dt} \;+\; y \;=\; \tan\left(\frac{t}{2}\right)\,,$$

es decir

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;+\; \frac{1}{4}y \;=\; \frac{1}{4}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot \tag{4.1}$$

Como la ecuación característica

$$m^2 \;+\; \frac{1}{4} \;=\; 0$$

tiene raíces $m = \pm\frac{1}{2}\imath$, la solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;+\; \frac{1}{4}y \;=\; 0$$

es

$$y_h(t) \;=\; c_1\cos\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; c_2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos una solución particular de (4.1) de la forma

$$y_p(t) \;=\; c_1(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; c_2(t)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,.$$

Luego debemos resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c_1'(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) & + & c_2'(t)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) & = & 0 \\ -\frac{1}{2}c_1'(t)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) & + & \frac{1}{2}c_2'(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) & = & \frac{1}{4}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot \end{array}\right.$$

Las soluciones son

$$\begin{array}{rcl} c_1'(t) & = & -\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right) \;=\; -\dfrac{1}{2}\sec\left(\dfrac{t}{2}\right) \;+\; \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \quad \Longrightarrow \\ c_1(t) & = & -\ln\left(\sec\left(\dfrac{t}{2}\right) \;+\; \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) \;+\; \text{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right) \;+\; c_1\,, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} c_2'(t) & = & \dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \;=\; \dfrac{1}{2}\text{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right) \quad \Longrightarrow \\ c_2(t) & = & -\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \;+\; c_2\,. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \left[-\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right), \end{aligned}$$

y la solución general de (4.1) es

$$y(t) = -\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_1\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

De esta forma la solución general de nuestra ecuación es

$$\begin{aligned} y(x) &= -\ln\left[\sec\left(\frac{1}{2x}\right) + \tan\left(\frac{1}{2x}\right)\right]\cos\left(\frac{1}{2x}\right) + \\ &\qquad c_1\cos\left(\frac{1}{2x}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.4.4 Usando el método de los coeficientes indeterminados encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' - y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10\cos(2x).$$

Solución. El polinomio característico de la ecuación homogénea $y'' - y = 0$ es $k^2 - 1 = 0$. Luego la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x}.$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea usando coeficientes indeterminados, separamos en dos ecuaciones

$$y'' - y = e^{-x}(2 - 4x) \quad \text{y} \tag{4.2}$$

$$y'' - y = 10\cos(2x) \tag{4.3}$$

Como -1 es solución de la ecuación característica debemos buscar una solución particular de (4.2) de la forma

$$y_1(x) = xe^{-x}(Ax + B).$$

Tenemos

$$y_1'(x) = e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B) \quad \text{y} \quad y_1''(x) = e^{-x}(Ax^2 + (B - 4A)x + 2(A - B))$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$e^{-x}(-4Ax + 2(A - B)) = e^{-x}(2 - 4x).$$

Luego $A = 1$ y $A - B = 1$, lo que implica $B = 0$. Por lo tanto

$$y_1(x) = x^2 e^{-x}\,.$$

Consideremos ahora la ecuación (4.3). Como 2 no es solución de la ecuación característica, buscamos una solución particular de la forma

$$y_2(x) = C\cos(2x) + D\text{sen}(2x)\,.$$

Tenemos

$$y_2'(x) = -2C\text{sen}(2x) + 2D\cos(2x) \quad \text{y} \quad y_2''(x) = -4C\cos(2x) - 4D\text{sen}(2x)\,,$$

y reemplazando en (4.3) obtenemos

$$-5C\cos(2x) - 5D\text{sen}(2x) = 10\cos(2x)\,.$$

Por lo tanto $C = -2$, $D = 0$ y

$$y_2(x) = -2\cos(2x)\,.$$

Luego

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = x^2 e^{-x} - 2\cos(x)$$

es solución particular de nuestra ecuación original y su solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + x^2 e^{-x} - 2\cos(x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 4.4.5 Para $x > 0$ encuentre la solución general de la ecuación

$$4xy'' + (2 - 8\sqrt{x}\,)y' - 5y = (3\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}}\,,$$

usando el cambio $x = t^2$.
Solución. Ponemos $x = t^2$ lo que implica $\frac{dx}{dt} = 2t$. Además

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{2t}\left[-\frac{1}{2t^2}\,\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2t}\,\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right]. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$4t^2\,\frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right] + (2 - 8t)\,\frac{1}{2t}\,\frac{dy}{dt} - 5y = e^{-t}(3t + 2)\,,$$

o bién

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = e^{-t}(3t + 2)\,. \tag{4.4}$$

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 - 4k - 5 = 0 = (k + 1)(k - 5)\,,$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}\,.$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución particular de (4.4) de la forma

$$y_p(t) = te^{-t}(A + Bt)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= e^{-t}[-Bt^2 + (-A + 2B)t + A] \\ y_p''(t) &= e^{-t}[Bt^2 + (A - 4B)t + 2(-A + B)]\,. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$e^{-t}[-12Bt - 6A + 2b] = e^{-t}[3t + 2]\,,$$

lo que implica

$$B = -\frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad A = -\frac{5}{12}\cdot$$

Luego la solución general de (4.4) es

$$y(t) = -\frac{1}{12}te^{-t}(5 + 3t) + c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}\,,$$

y por lo tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es

$$y(x) = -\frac{1}{12}\sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}(5 + 3\sqrt{x}\,) + c_1 e^{-\sqrt{x}} + c_2 e^{5\sqrt{x}}\,.$$

Ejercicio 4.4.6 Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$y'' + y = \tan(x) + 3x - 1\,.$$

Determine además el intervalo máximo donde está definida.

Solución. Nuestra ecuación es

$$y'' + y = \tan(x) + 3x - 1\,. \tag{4.5}$$

Observemos primero que la ecuación no está definida para los x de la forma $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n es un entero, ya que en estos x la función coseno se anula y por lo tanto no estan en el dominio de la función tangente. Como queremos una solución alrededor de $x = 0$, debemos partir imponiendo la condición $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Resolvamos entonces la ecuación para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \text{sen}(x) \,.$$

Resolvamos primero usando variación de parámetros la ecuación

$$y'' + y = \tan(x) \tag{4.6}$$

Buscamos entonces solución de (4.6) de la forma

$$y_1(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \text{sen}(x) \,,$$

y por lo tanto debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \cos(x) c_1'(x) + \text{sen}(x) c_2'(x) & = 0 \\ -\text{sen}(x) c_1'(x) + \cos(x) c_2'(x) & = \tan(x) \,. \end{cases}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\tan(x) \cdot \text{sen}(x) \\ c_2'(x) &= \text{sen}(x) \,, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \text{sen}(x) - \ln(\sec(x) + \tan(x)) + c_1 \,, \\ c_2(x) &= -\cos(x) + c_2 \,. \end{aligned}$$

Observe que todo esto tiene sentido ya que para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tenemos que $\sec(x) + \tan(x) > 0$.
Luego la solución general de (4.6) es

$$y_1(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \text{sen}(x) - \ln(\sec(x) + \tan(x)) \cos(x) \,,$$

y ésta esta definida para todo $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Para resolver

$$y'' + y = 3x - 1 \tag{4.7}$$

usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución de la forma

$$y_2(x) = Ax + B \,.$$

Reemplazando en (4.7) y comparando coeficientes se obtiene

$$A = 3 \quad \text{y} \quad B = -1 \,,$$

lo que implica

$$y_2(x) \;=\; 3x \;-\; 1\,.$$

Luego la solución general de la ecuación (4.5) es

$$y(x) \;=\; c_1(x)\cos(x) \;+\; c_2(x)\mathrm{sen}(x) \;-\; \ln(\sec(x) \;+\; \tan(x))\cos(x) \;+\; 3x \;-\; 1\,,$$

y el intervalo máximo donde esta solución está definida es $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ejercicio 4.4.7 Encuentre la solución general alrededor de $x = \pi$ de la ecuación

$$y'' \;+\; y \;=\; \tan(x) \;+\; 3x \;-\; 1\,,$$

y determine además el intervalo máximo donde está definida.