Ecuaciones Diferenciales [1]
Capítulo 3
Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

V. Guíñez, R. Labarca y M. Martínez
Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile

[1]Este trabajo fue financiado por el Proyecto de Docencia Usach VG9813

Capítulo 3

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

3.1 Familias de Curvas y Trayectorias Ortogonales

Hemos visto que normalmente la solución general de una ecuación diferencial de primer orden es una familia de funciones que contiene una constante arbitraria, llamada *parámetro*. Si la ecuación diferencial verifica nuestro Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 2.4.1), por cada punto del dominio de definición Λ de la ecuación diferencial pasa una única curva solución (máxima). Por lo tanto, las curvas de nuestra familia cubren nuestro dominio Λ y son disjuntas entre sí. Llamaremos en general, **familia a 1-parámetro de curvas** sobre un conjunto Λ del plano, a cualquier familia, que dependa de un parámetro, de curvas que son disjuntas entre sí y que cubren Λ.

Si la familia a 1-parámetro de curvas viene dada implícitamente por la ecuación

$$f(x, y, c) = 0\,, \tag{3.1}$$

en la mayoría de los casos podemos encontrar una ecuación diferencial cuya solución general esté dada por (3.1). Para lograr esto, primero derivamos implícitamente 3.1 respecto de x, obteniendo una relación del tipo

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0\,. \tag{3.2}$$

Luego, eliminamos el parámetro c (si es posible) usando las ecuaciones 3.1 y 3.2, llegando a una ecuación diferencial de primer orden:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0\,.$$

Ejemplo 3.1.1 Considere la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen

$$x^2 + y^2 = 2cx\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$$

y encontremos la ecuación diferencial asociada.

Derivando con respecto a x obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2c\,.$$

Pero

$$x^2 + y^2 = 2cx \quad \Longrightarrow \quad 2c = \frac{x^2 + y^2}{x}\,,$$

y reemplazando en la ecuación diferencial tenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x}\,,$$

o bién

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\,.$$

Como aplicación consideremos el problema de hallar trayectorias ortogonales. Diremos que una familia de curvas es una **familia de trayectorias ortogonales** de otra familia de curvas, si toda curva de una de las familias es ortogonal (es decir, perpendicular) a todas las de la otra familia. Por ejemplo, la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos centrados en el origen $x^2 + y^2 = c^2\,,\ c \in \mathbb{R}$, es la familias de rectas por el origen $y = cx\,,\ c \in \mathbb{R}$.

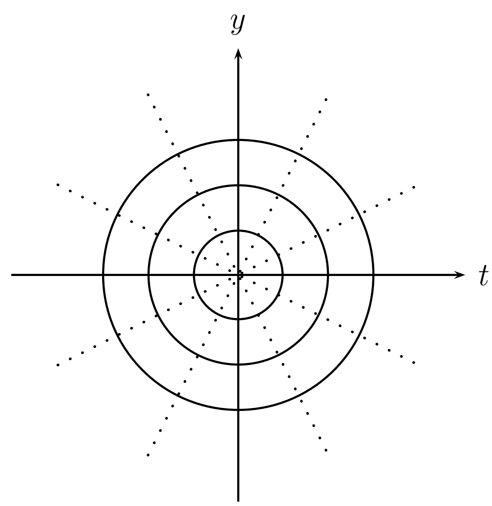

Figura 11

Las correspondientes ecuaciones diferenciales son

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,,$$

respectivamente, y la ortogonalidad de sus curvas solución se refleja en que

$$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x} \;=\; -1\,.$$

De hecho, la familia de trayectorias ortogonales de una familia de curvas que es la solución general de la ecuación $y' = f(x,y)$, está dada por la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{1}{f(x,y)}\,.$$

Ejemplo 3.1.2 Encontremos la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen $x^2+y^2 = 2cx\,,\; c \in \mathbb{R}$, del ejemplo anterior.

La ecuación diferencial asociada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}\,, \tag{3.3}$$

y luego debemos encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}\,. \tag{3.4}$$

La forma más sencilla de resolver esta ecuación es intercambiando los roles de las variables x e y poniendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2}{2xy}\,.$$

Observe que esta ecuación es la misma ecuación 3.3 con x e y intercambiados. Luego la solución general es la solución general de 3.3 con x e y intercambiados, es decir

$$x^2+y^2 = 2cy\,,\; c \in \mathbb{R}\,,$$

que es la familia de círculos tangentes al eje OX en el origen.

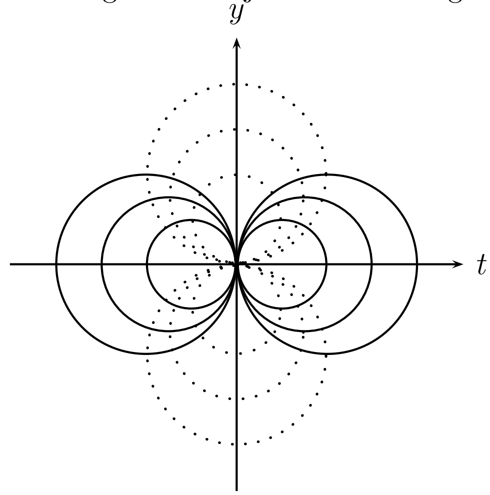

Figura 12

Otra forma de resolver 3.4 es escribiéndola de la forma

$$2xydx \;+\; (y^2-x^2)dy = 0\,,$$

y observando que tiene factor integrante que depende sólo de variable y. En efecto, si

$$M(x,y) = 2xy \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = y^2 - x^2\,,$$

entonces

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; -\frac{2}{y}\,,$$

y el factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; e^{\int_1^y -\frac{2}{v}dv} \;=\; \frac{1}{y^2}\cdot$$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos la ecuación exacta

$$2\frac{x}{y}dx \;+\; \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0\cdot$$

Entonces

$$u(x,y) \;=\; \int 2\frac{x}{y}dx + g(y) \;=\; \frac{x^2}{y} + g(y) \quad \text{y}$$

$$1 - \frac{x^2}{y^2} \;=\; \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; -\frac{x^2}{y^2} + g'(y)\,.$$

Por lo tanto

$$g'(y) \;=\; 1 \quad \Longrightarrow \quad g(y) \;=\; y\,,$$

y

$$u(x,y) \;=\; \frac{x^2}{y} + y\,.$$

Luego la solución general es

$$\frac{x^2}{y} + y \;=\; 2c\,,$$

o lo que es lo mismo, multiplicando por y

$$x^2 + y^2 \;=\; 2cy\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

3.2 Reacciones químicas de primer orden y desintegración

En general no es dificil observar en la naturaleza diversas reacciones químicas entre elementos. Por ejemplo, si una moléculas de cierto tipo, por la acción del medio, tienen tendencia a desintegrarse en moléculas más pequeñas a un ritmo que no se ve afectado por la presencia de otras sustancias, es natural pensar que el número de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo sea proporcional al número total presente (reacción química de primer orden).

Supongamos que en $t = 0$ se tienen x_0 gramos. Si denotamos por $x(t)$ el número de gramos presentes en el instante t (luego $x(0) = x_0$), tendremos que $\frac{dx}{dt}$ es el ritmo de crecimiento de x y $-\frac{dx}{dt}$ es el ritmo de decrecimiento. De esta forma si $k > 0$ es la constante de proporcionalidad, tenemos la ecuación

$$-\frac{dx}{dt} = kx\,.$$

Integrando se obtiene

$$\ln(x) - \ln(x_0) \;=\; -kt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; x_0 e^{-kt}\,.$$

Se llama **semi vida** T al tiempo requerido para que la sustancia se reduzca a la mitad. De esta forma

$$\frac{x_0}{2} \;=\; x_0 e^{-kT} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2} \;=\; e^{-kT} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(2) \;=\; -kT \quad\Longrightarrow\quad T \;=\; \frac{\ln(2)}{k}\cdot$$

Por lo tanto, si se conocen k o T experimentalmente, por esta relación se conoce la otra cantidad.

Ejemplo 3.2.1 Desintegración radioactiva.

El radio carbono tiene semi vida de más o menos 5.600 años. Este se produce en la alta atmósfera por la acción de rayos cósmicos sobre el nitrógeno. El radio carbono por oxidación pasa a dióxido de carbono y este se mezcla (por el viento) con el dióxido de carbono no radiactivo ya presente.
La proporción en el carbono ordinario ha alcanzado hace tiempo un estado de equilibrio.
Todas las plantas y los animales que comen plantas, incorporan esta proporción de radio carbono en sus tejidos. Mientras el animal o la planta viven, esta proporción permanece constante. Pero al morir deja de absorber radio carbono y el que había en el momento de morir sigue desintegrándose.
Así si un fragmento de madera antigua tiene la mitad de radioactividad que un árbol vivo, éste vivió hace unos 5.600 años ($= T$). Si solo tiene la cuarta parte, determinemos el tiempo $\tilde{t}$ en que vivió. Tenemos entonces

$$\frac{x_0}{4} \;=\; x_0 e^{-k\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{4} \;=\; e^{-k\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(4) \;=\; -k\tilde{t}\,,$$

y luego

$$2\ln(2) \;=\; \frac{\ln(2)}{T}\tilde{t} \quad\Longrightarrow\quad \tilde{t} \;=\; 2T \;=\; 11.200 \quad \text{(años aproximadamente)}\,.$$

Esto proporciona un método para poner fecha a cualquier objeto antiguo de origen orgánico: madera, carbón, fibra vegetal, huesos, cuernos o piel.

Ejemplo 3.2.2 Si la vida media de una sustancia reactiva es de 32 dias. Determinemos el tiempo $\tilde{t}$ en que 24 Kilos se convierten en 3 Kilos.

Tenemos
$$x(0) \;=\; 24 \quad \text{y} \quad 32 \;=\; T \;=\; \frac{\ln(2)}{k} \quad \Longrightarrow \quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{32}\,.$$
Entonces debemos tener
$$3 \;=\; x(\tilde{t}) \;=\; 24e^{-k\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8} \;=\; e^{-k\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad k\tilde{t} \;=\; \ln(8)\,,$$
lo que implica
$$\tilde{t} \;=\; \frac{3\ln(2)}{k} \;=\; 3\cdot 32 \;=\; 96 \quad \text{días}\,.$$

Ejercicios 3.2.3 Resuelva

1.- Si el 25 % de una sustancia radiactiva se desintegra en 100 años. ¿ Cual es la vida media ?

2.- En un proceso con una sustancia radiactiva se hacen dos mediciones. La primera, dos horas después de iniciado el proceso arroja la cantidad de 100 mgr.; la segunda, una hora después, indica la presencia de 8 mgr. ¿ Cual es la cantidad original de sustancia radiactiva ?

3.- Usando carbono 14 (C^{14}) cuya vida media es 5.568 años, determine la edad de un fósil humano que contiene 25,2 mgr. de C^{14}, si la cantidad presente en un ser humano vivo es 53,8 mgr.

Ejemplo 3.2.4 Crecimiento de bacterias.

Sea $N(t)$ la cantidad de bacterias presentes en el instante t. Entonces
$$\frac{dN}{dt} \;=\; \text{Nacimientos} \quad \text{-} \quad \text{Muertes} \;=\; a(t)N \;-\; b(t)N\,,$$
donde $a(t)$ (respectivamente, $b(t)$) es la proporción de nacimientos (resp., muertes) con respecto a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Entonces, tenemos la ecuación
$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} \;=\; a(t) \;-\; b(t)\,, \quad \Longrightarrow \quad N(t) \;=\; N(0)e^{\int_0^t (a(s)-b(s))ds}\,.$$
Por ejemplo si $a(t) = a$ y $b(t) = b$, tenemos $N(t) = N(0)e^{(a-b)t}$.

Ejemplo 3.2.5 Suponga que conoce $N(0)$ y $N(t_1)$. ¿ Cuanto tiempo $\tilde{t}$ debe transcurrir para tener $\bar{N}$ bacterias ?

Llamemos $N_0 = N(0)$ y $N_1 = N(t_1)$. Entonces

$$N(t) \;=\; N_0 e^{(a-b)t}\,, \quad \text{y}$$

$$N_1 \;=\; N(t_1) \;=\; N_0 e^{(a-b)t_1} \quad \Longrightarrow \quad a-b \;=\; \frac{\ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right)}{t_1}\,.$$

Por lo tanto

$$\bar{N} \;=\; N(\tilde{t}) \;=\; N_0 e^{(a-b)\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{t} \;=\; \frac{\ln\left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)}{a-b} \;=\; t_1 \frac{\ln\left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right)}\,.$$

Ejemplo 3.2.6 Una superficie electrizada se descarga con una velocidad proporcional a la carga. Hallar la carga en función del tiempo.

Si designamos por $C(t)$ la carga presente en el instante t, nuestra ecuación es nuevamente

$$\frac{dC}{dt} \;=\; -kC\,.$$

Por lo tanto

$$C(t) \;=\; C_0 e^{-kt}\,.$$

Ejemplo 3.2.7 Ley de enfriamiento de Newton.
La velocidad con que se enfría una sustancia en el aire es proporcional a la diferencia de la temperatura de la sustancia y la del aire.

Si designamos por $T_s(t)$ y T_m respectivamente, la temperatura de la sustancia en el instante t y la temperatura (que suponemos constante) del medio (aire) en que se encuentra la sustancia, nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dT_s}{dt} \;=\; -k(T_s(t) - T_m)\,.$$

Separando variables

$$\frac{dT_s}{T_s(t) - T_m} \;=\; -kdt\,,$$

e integrando entre 0 y t

$$\ln\left(\frac{T_s(t) - T_m}{T_s(0) - T_m}\right) \;=\; -kt\,,$$

obtenemos la solución

$$T_s(t) \;=\; T_m + (T_s(0) - T_m)e^{-kt}\,.$$

Por ejemplo, si la temperatura del aire es de 20^0 y la sustancia se enfría de 100^0 a 60^0 en 30 minutos, calculemos en que instante la temperatura de la sustancia será de 40^0.

Tenemos

$$T_s(0) \;=\; 100\,, \quad T_m \;=\; 20\,, \quad T_s(30) \;=\; 60\,.$$

Luego

$$T_s(t) \;=\; 20 \;+\; 80e^{-kt}\,.$$

Evaluando en $t = 30$ obtenemos

$$60 \;=\; 20 \;+\; 80e^{-30k}\,,$$

lo que implica

$$\frac{1}{2} \;=\; e^{-30k} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(2) \;=\; -30k \quad\Longrightarrow\quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{30}\cdot$$

Sea $\tilde{t}$ el tiempo buscado. Entonces

$$40 \;=\; 20 \;+\; 80e^{-\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{4} \;=\; e^{-\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad -2\ln(2) \;=\; -\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}\,,$$

lo que implica

$$\tilde{t} \;=\; 60\,\text{minutos}\,.$$

3.3 Procesos químicos simples

Suponemos que A y B son compuestos químicos que reaccionan entre ellos de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -k_1 A \;+\; k_2 B \\ \dot{B} &= k_1 A \;-\; k_2 B\,. \end{aligned}$$

Asumimos $A(0) \;=\; A_0 > 0$, $B(0) \;=\; 0$ y $A(t) \;+\; B(t) \;\equiv\; A_0$ para todo t. Entonces $B(t) \;=\; A_0 \;-\; A(t)$ y nuestra primera ecuación diferencial se transforma en la ecuación lineal de primer orden

$$\dot{A} \;+\; (k_1 \;+\; k_2)A \;=\; k_2 A_0\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{-\int_0^t (k_1+k_2)ds}\left[A_0 \;+\; \int_0^t e^{\int_0^u (k_1+k_2)ds} k_2 A_0 du\right] \\ &= e^{-(k_1+k_2)t}\left[A_0 \;+\; k_2 A_0 \int_0^t e^{(k_1+k_2)u} du\right] \\ &= e^{-(k_1+k_2)t}\left[A_0 \;+\; \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2}\left(e^{(k_1+k_2)t} - 1\right)\right] \\ &= A_0\left[1 \;-\; \frac{k_2}{k_1+k_2}\right] e^{-(k_1+k_2)t} \;+\; \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2} \\ &= \frac{k_1 A_0}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t} \;+\; \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2}\,, \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
B(t) &= A_0 - A(t) = A_0 - \frac{k_1 A_0}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t} - \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2} \\
&= \frac{k_1 A_0}{k_1+k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right] .
\end{aligned}
$$

Observe que si ponemos

$$
A_e = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2} \quad \text{y} \quad B_e = \lim_{t\to\infty} B(t) = \frac{k_1 A_0}{k_1+k_2} ,
$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
A(t) &= B_e e^{-(k_1+k_2)t} + A_e \quad \text{y} \\
B(t) &= B_e\left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right] .
\end{aligned}
$$

Observe finalmente que los valores de k_1 y k_2, que en general se obtienen experimentalmente, verifican

$$
\frac{1}{t}\ln\left(\frac{A_0 - A_e}{A(t) - A_e}\right) = k_1 + k_2 = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{B_e}{B_e - B(t)}\right) .
$$

3.4 Circuitos eléctricos simples

Sabemos que las leyes de Newton nos permiten establecer relaciones entre las fuerzas que afectan a un sistema mecánico. De manera similar , las leyes de Kirchhoff (1824-1887) nos permiten establecer relaciones entre los elemnetos que proveen y usan energia en un circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico es un dispositivo que permite la circulación de un campo eléctrico. Un campo eléctrico es el campo de fuerza asociado a un carga eléctrica. Finalmente, la carga eléctrica es uno de los constituyentes básicos de la materia y se reconocen dos tipos que son arbitrariamente designados como positiva y negativa. El principio general es que cargan iguales se atraen y cargas opuestas se repelen. La velocidad de la carga eléctrica se denomina *corriente*. Esto es: si q es la carga, entonces la corriente es $I = \frac{dq}{dt}$.

En un circuito eléctrico se reconocen elementos activos y pasivos. Elementos activos son baterías, pilas, motores eléctricos. Elementos pasivos son resistores, inductores y capacitores.

Por ejemplo, consideremos un circuito R L C en serie como en la Figura 13.

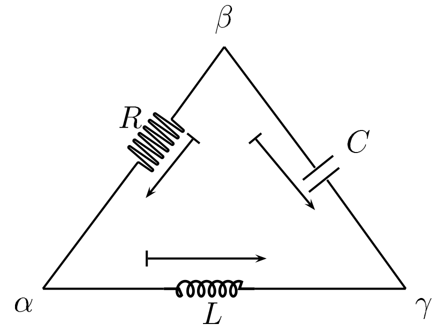

Figura 13

Consta de tres ramas: una resistencia R, un autoinductor L y un capacitor C.
Una rama se puede considerar como un mecanismo eléctrico con dos terminales. Por ejemplo la rama C tiene terminales β y γ. Estos terminales se conectan entre si para formar los nodos α, β, γ.
Por cada rama circula una corriente cuya intensidad se mide por un número real, digamos, i_R, i_L, i_C, donde por ejemplo, i_R es la intensidad a través del resistor.
Las flechas del diagrama que orientan las ramas indican el sentido en que fluye la corriente. Si $i_R > 0$, entonces fluye de β a α.

Ley de Kirchhoff para las intensidades: La suma de las intensidades de corriente que van hacia un nodo es igual a la suma de las que se alejan.

Esto también puede enunciarse como *la cantidad neta de corriente a través de cada nodo es cero.*

En nuestro caso

$$i_R = i_L \, , \; i_L = -i_C \; .$$

El estado del circuito está caracterizado por la intensidad $i = (i_R, i_L, i_C)$ junto con la tensión (voltaje), o bien, las caídas de tensión (caídas de voltaje) en cada rama. Sean estas v_R, v_L, v_C.
Para medir la tensión se coloca un voltímetro en cada uno de los nodos α, β, γ que marca $v(\alpha), v(\beta), v(\gamma)$. Entonces

$$v_R = v(\beta) - v(\alpha) \, , \; v_L = v(\alpha) - v(\gamma) \, , \; v_C = v(\beta) - v(\gamma) \, .$$

Ley de Kirchhoff para las tensiones: $v_R + v_L - v_C = 0$ (en nuestro circuito, Figura 13).

Este es un caso particular de la Ley de Kirchhoff para tensiones que dice que *la caída neta de voltaje en un circuito cerrado es cero.*

Si se considera el circuito

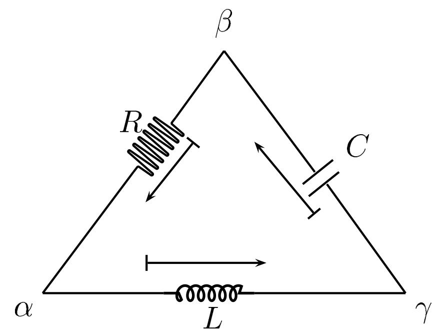

Figura 14

se tiene

$$i_R = i_L = i_C \quad \text{y} \quad v_R + v_L + v_C = 0 \, .$$

Ley de Ohm: La caída de voltaje v_R a través de un resistor es proporcional a la corriente I que pasa por el resistor.

$$v_R = RI \, .$$

Leyes de Faraday y Lenz: La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional a la razón de cambio instantáneo de la corriente.

$$v_L = L\frac{dI}{dt} \, .$$

Si consideramos el circuito

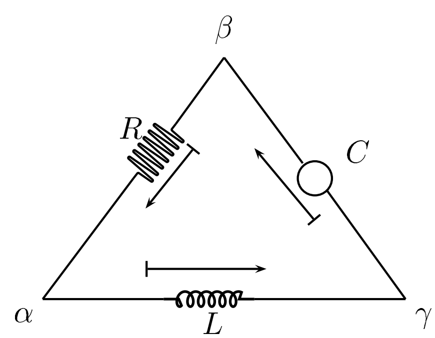

Figura 15

donde $E = E(t)$ es una fuerza electromotriz que proporciona un voltaje (o energía potencial) al circuito en el instante t.

Ley de conservación de voltajes de Kirchhoff: $v_L + v_R = E(t)$.
Obtenemos así la ecuación lineal de primer orden

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E(t) \, .$$

En el caso en que $E(t) = E_0$ es constante,

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}$$

cuya solución es

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[I(0) + \frac{E_0}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t} - 1\right)\right] .$$

Observaciones 3.4.1 Imponer la condición $I(0) = 0$ quiere decir que en el instante inicial no circula corriente por el circuito. En este caso antes de iniciar el circuito nuestra situación puede ser como la mostrada en la Figura 16.

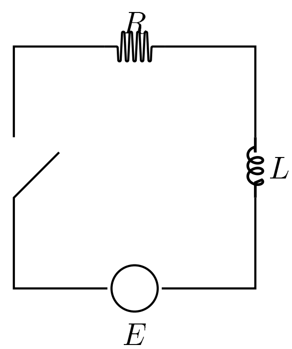

Figura 16

Una condición del tipo $I(0) > 0$ se obtiene cuando existe otra fuerza electromotriz constante E_α que se aplica por un tiempo apropiado para obtener una corriente estacionaria $I(0)$ (Figura 17).
En el instante $t = 0$ el interruptor pasa del punto A al punto B cerrando un circuito propulsado por una fuerza electromotriz E (Figura 18).

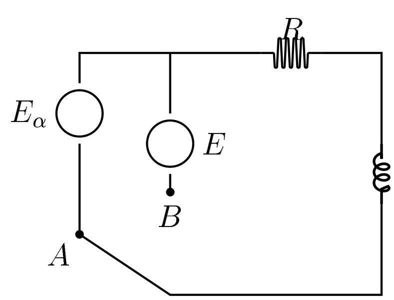

Figura 17

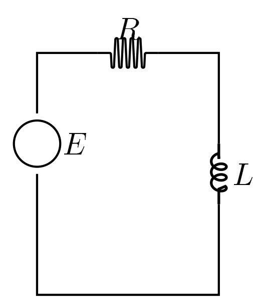

Figura 18

En este caso la ecuación es

$$I' + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}, \quad I(0) = I_0 > 0 .$$

Otra situación se presenta cuando no hay fuerza electromotriz en un circuito R - L. Antes de activarse el circuito podemos tener la situación de la Figura 19.

En el instante $t = 0$ el interruptor pasa del punto A al punto B, cerrándose un circuito que no tiene fuerza electromotriz (Figura 20).

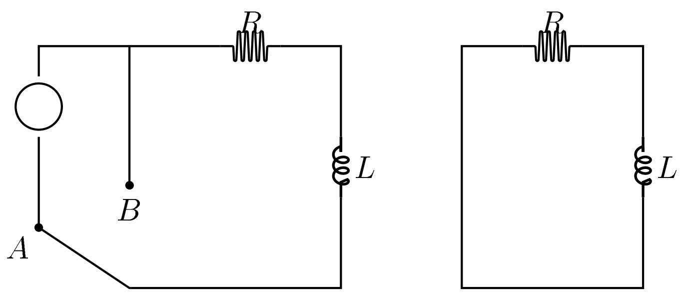

Figura 19 Figura 20

La ecuación es

$$I' + \frac{R}{L} I = 0 , \quad I(0) = I_0 > 0 ,$$

cuya solución es

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{R}{L}t} .$$

Observe que el circuito se *descarga* una vez que la fuente de voltaje a sido suprimida.

Frecuentemente $E(t)$ es de la forma

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{(fuerza electromotriz alterna)}$$

Se tiene la ecuación

$$I' + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t) ,$$

y suponiendo $I(0) = 0$, se tiene la solución

$$I(t) = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}u} \cos(\omega u) du ,$$

o bien

$$I(t) = \frac{E_0}{\frac{R^2}{L} + \omega^2 L} \left(\frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \mathrm{sen}(\omega t) \right) - \frac{E_0 R}{R^2 + L^2\omega^2} \, e^{-\frac{R}{L}t} .$$

3.5 Problemas de mezclas

Para la obtención de un remedio, de una pintura, de un trago preparado, en escala .... , es necesario mezclar diversos ingredientes los cuales hacen parte de una solución perfectamemnte homogeneizada (esto es: no importa la muestra, la distribución de ingredientes es siempre la misma). Por ejemplo, consideremos un recipiente de V

litros de capacidad que contiene una solución perfectamente homogeneizada (por ejemplo: agua y sal) como en la Figura 21.

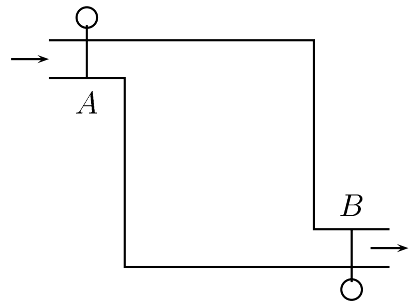

Figura 21

Se accionan simultáneamente las llaves A y B, haciendo ingresar por A agua pura a razón de $a\ lts/min$ y se extrae solución por B en la misma proporción.
Sea $x(t)$ la cantidad de sal presente en un instante t posterior. Entonces

$$\frac{x(t)}{V} \quad \text{es la cantidad de sal por litro en el recipiente,}$$

y la variación de la cantidad de sal es

$$\dot{x} \;=\; -a\,\frac{x(t)}{V}\ .$$

De esta forma

$$x(t) \;=\; x(0)\,e^{-\frac{a}{V}t}\ .$$

Si en lugar de agua pura entra una solución que contiene c gramos de sal por litro, entonces

$$\dot{x} \;=\; a\cdot c \;-\; a\,\frac{x(t)}{V}\ ,$$

es decir

$$\frac{dx}{x - V\cdot c} \;=\; -\frac{a}{V}\,dt \quad\longrightarrow\quad x(t) \;=\; V\cdot c \;+\; (x(0) \;-\; V\cdot c)\,e^{-\frac{a}{V}t}\ .$$

Las múltiples posibilidades que se presentan en los problemas de mezclas se reducen a la ecuación

$$\dot{x} \;= e(t) \;-\; s(t)\ ,$$

donde $e(t)$ y $s(t)$, son respectivamente, la cantidad de sal que se añade y se retira en el instante de t.

Ejemplo 3.5.1 Considere el mismo recipiente de la Figura 21 y suponga que de nuevo por la llave A entra agua pura a razón de a lts/min; pero que por la llave B sale solución a razón de b lts/min, con $b > a$.

Tenemos entonces

- $e(t) \;=\; 0$ (no hay entrada de sal).
- $V \;-\; (b-a)\,t$: es la cantidad de líquido presente en el instante t.
- $\frac{x(t)}{V \,-\, (b-a)\,t}$: es la cantidad de sal por litro en el instante t.

Luego

$$s(t) \;=\; \frac{x(t)}{V \;-\; (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; -\frac{x\,b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dx}{x} \;=\; -\frac{b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,dt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; x(0)\left[1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right]^{\frac{b}{b-a}}\,.$$

Ejemplo 3.5.2 Suponga la misma situación anterior, pero entrando por A en lugar de agua pura, solución con concentración de c gramos por litro.

Tenemos

$$e(t) \;=\; c\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot a\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

$$s(t) \;=\; \frac{x}{V \;-\; (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; c\,a - \frac{x\,b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,.$$

Esta es la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} \;+\; \frac{b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,x \;=\; c\,a\,,$$

cuya solución es

$$x(t) \;=\; cV\left(1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right) \;+\; (x(0) - cV)\left(1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right)^{\frac{b}{b-a}}\,.$$

Ejemplo 3.5.3 Consideremos ahora dos tanques como en la Figura 22

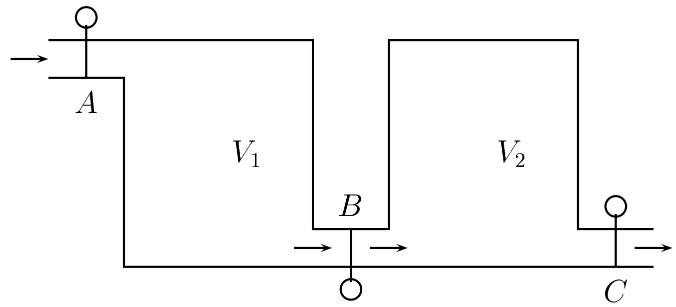

Figura 22

Al primero de V_1 litros de capacidad entra agua pura a través de la llave A a razón de b lts/min. Por la llave B, también a razón de b lts/min sale solución del primer tanque y entra en el segundo. Finalmente del segundo tanque, por la llave C sale solución a razón de b lts/min.
Sea $x_1(t), x_2(t)$ la cantidad de sal en el primer y segundo tanque, respectivamente, en el instante t. Tenemos entonces, en el primer tanque, razón de entrada $e_1(t) = 0$ y razón de salida

$$s_1(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \frac{\text{grs}}{\text{lt}} \, b \, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \, .$$

Por otra parte, en el segundo tanque, la razón de entrada $e_2(t)$ es igual a la razón de salida del primer tanque $s_1(t)$. Luego

$$e_2(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \frac{\text{grs}}{\text{lt}} \, b \, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \, ,$$

y la razón de salida es

$$s_2(t) = \frac{x_2(t)}{V_2} \frac{\text{grs}}{\text{lt}} \, b \, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \, .$$

Tenemos así el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\frac{b}{V_1} \, x_1 \\ \dot{x_2} = \frac{b}{V_1} \, x_1 - \frac{b}{V_2} \, x_2 \end{cases}$$

Consideremos ahora $b = 2$ lt/min, $V_1 = 1$ lt, $V_2 = 2$ lt y las condiciones iniciales $x_1(0) = 5$ gr y $x_2(0) = 6$ gr y tratemos de determinar cuanto debe funcionar el sistema para que del segundo tanque empiece a salir solución con concentración por debajo de 1 gr/lt.
Con estos valores tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2 \, x_1 \\ \dot{x_2} = 2 \, x_1 - x_2 \end{cases}$$

Resolviendo la primera ecuación obtenemos

$$x_1(t) = 5e^{-2t} \, ,$$

y reemplazando en la segunda ecuación tenemos la ecuación lineal

$$\dot{x_2} \;+\; x_2 \;=\; 10e^{-2t}\;.$$

Por lo tanto, usando la Fórmula de Leibniz (2.34),

$$x_2(t) \;=\; e^{-t}\left(\int_0^t e^t 10e^{-2t}dt + 6\right) \quad\Longrightarrow\quad x_2(t) \;=\; 16e^{-t} \;-\; 10e^{-2t}\;.$$

Debemos encontrar $\bar{t}$ tal que

$$\frac{x_2(\bar{t})}{V_2} \;=\; 1 \quad \text{es decir} \quad 16e^{-\bar{t}} \;-\; 10e^{-2\bar{t}} \;=\; 2\;.$$

Poniendo $u = e^{-\bar{t}}$ y dividiendo por 2 tenemos la ecuación

$$5u^2 - 8u + 1 \;=\; 0\;,$$

cuyas soluciones son

$$u_1 \;=\; \frac{4+\sqrt{11}}{5} \sim 1.46 \quad \text{y} \quad u_2 \;=\; \frac{4-\sqrt{11}}{5} \sim 0.1368\;.$$

Como para t positivo $u = e^{-t} < 1$, tenemos que

$$u_2 = e^{-\bar{t}} \quad\Longrightarrow\quad \bar{t} \sim 1,989\;.$$

Ejemplo 3.5.4 Queremos inyectar un medicamento en un órgano humano. Supongamos que el volumen de circulación sanguínea del órgano es 150 cm^3 y que se inyectan 1 cm^3/min de agua destilada con 0.3 mgr/cm^3 de concentración de medicamento. La sangre entra al órgano a la misma razón que sale. Si en el instante inicial no hay presencia del medicamento ¿ En qué momento la concentración del medicamento en el órgano será de 0.05 mgr/cm^3?

Si designamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t, tenemos $x(0) \;=\; 0$ y nuestra ecuación es

$$\dot{x} \;=\; 0.3\cdot 1 \;-\; \frac{x}{150}\cdot 1\;.$$

Tenemos entonces la ecuación lineal

$$\dot{x} \;+\; \frac{x}{150} \;=\; 0.3\;,$$

cuya solución es

$$x(t) \;=\; 45 \;-\; 45e^{-\frac{1}{150}t}\;.$$

Queremos encontrar $\bar{t}$ tal que

$$\frac{x(\bar{t})}{150} = 0.05 = \frac{5}{100}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(\bar{t}) = \frac{75}{10} = 7.5 &\Longrightarrow 45 - 45e^{-\frac{1}{150}\bar{t}} = 7.5 \\ &\Longrightarrow e^{-\frac{1}{150}\bar{t}} = \frac{37.5}{45} \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{150}\bar{t} = \ln\left(\frac{37.5}{45}\right) \\ &\Longrightarrow \bar{t} = -150\ln\left(\frac{37.5}{45}\right) \text{ min.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.5 Una solución de acido nítrico fluye a razón constante de 6 lts/min. hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 litros de una solución del mismo ácido al 0.5%. La solución contenida en el tanque se mantiene uniformemente distribuida y sale del tanque a razón de 8 lt/min. Si la solución que entra al tanque es del 20 % de ácido nítrico, determine la cantidad de este ácido presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿ En qué momento el % de ácido contenido en el tanque será de 10 % ?

Sea $x(t)$ la cantidad de ácido nítrico presente en el instante t.
Ingresan: 6 lt/min. al 20% , lo cual significa: 1.2 lt/min.

Salen: $\frac{8x}{200-2t}$ lt/min. luego de t minutos.
Luego la ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} = 1.2 - \frac{4x}{100-t}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{100-t}x = 1.2\,.$$

La ecuación es lineal y su solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-4\int\frac{dt}{100-t}}\left[c + \int 1.2e^{4\int\frac{dt}{100-t}}dt\right] \\ &= e^{4\ln(100-t)}\left[c + 1.2\int e^{-4\ln(100-t)}dt\right] \\ &= (100-t)^4\left[c + 1.2\int(100-t)^{-4}dt\right] \\ &= (100-t)^4\left[c + \frac{1.2}{3}(100-t)^{-3}\right] \\ &= c(100-t)^4 + 0.4(100-t)\,. \end{aligned}$$

En $t = 0$ hay 200 lt. al 0.5% . Por lo tanto $x(0) = 1$lt. Así

$$1 = c \cdot 100^4 + 0.4 \cdot 100 \quad \Longrightarrow \quad c \; = \; -39 \cdot 100^{-4} \, .$$

Entonces

$$x(t) \; = \; 0.4(100 - t) - 39 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^4 \, .$$

Ahora, si $\tilde{t}$ es el instante en que en el estanque hay 10% de ácido, debemos tener

$$100 \cdot \frac{x(\,\tilde{t}\,)}{200 - 2\tilde{t}} \; = \; 10$$

lo que implica

$$5 \left[0.4 - 39 \left(\frac{100 - \tilde{t}}{100} \right)^4 \frac{1}{100 - \tilde{t}} \right] \; = \; 1$$

es decir

$$2 - \frac{195}{100^4}(100 - \tilde{t}\,)^3 \; = \; 1$$

lo que implica

$$(100 - \tilde{t}\,)^3 \; = \; \frac{100^4}{195} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{t} = 19.9573 \text{ min.}$$