

## 2.10 Ejercicios resueltos del Capítulo 2

**Ejercicio 2.10.1** Considere la ecuación diferencial

$$y - xy' = a(1 + x^2y'), \quad a > 1.$$

- Encuentre la solución general.
- Encuentre la solución particular que verifica  $y(1) = \frac{a}{a+1}$ .
- Encuentre el intervalo máximo donde la solución particular anterior está definida.

**Solución.** a) Reordenando tenemos

$$y - a = (ax^2 + x)y' \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y - a}{x(ax + 1)},$$

y separando variables

$$\frac{dy}{y - a} = \frac{dx}{x(ax + 1)} \implies \frac{dy}{y - a} = \frac{dx}{x} - \frac{adx}{ax + 1}.$$

Luego integrando obtenemos

$$\ln(y - a) = \ln(x) - \ln(ax + 1) + \ln(c),$$

y exponenciando

$$y - a = \frac{cx}{ax + 1}.$$

Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = a + \frac{cx}{ax + 1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Imponiendo a la solución general la condición  $y(1) = \frac{a}{a+1}$ , obtenemos

$$\frac{a}{a+1} = a + \frac{c}{a+1} \implies \frac{a}{a+1} = \frac{a^2 + a + c}{a+1} \implies c = -a^2.$$

Luego nuestra solución particular es

$$y(x) = a - \frac{a^2x}{ax + 1}.$$

c) El dominio de la función

$$y(x) = a - \frac{a^2x}{ax + 1}$$

es la unión de los intervalos abiertos

$$\left] -\infty, -\frac{1}{a} \left[ \quad y \quad \right] -\frac{1}{a}, +\infty \left[ .$$

Como  $a$  es positivo, el 1 pertenece al segundo intervalo y luego

$$\left] -\frac{1}{a}, +\infty \left[ ,$$

es el intervalo máximo buscado.

**Ejercicio 2.10.2** Mostrar que la ecuación diferencial

$$2x^4 y y' + y^4 = 4x^6$$

se reduce a una ecuación homogénea mediante la transformación  $y = z^n$ , para cierto  $n$ . Determine el valor de  $n$  y resuelva la ecuación.

**Solución.** Si  $y = z^n$  entonces  $y' = nz^{n-1}z'$ , y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$2x^4 z^n (nz^{n-1}z') + z^{4n} = 4x^6 ,$$

es decir

$$2nx^4 z^{2n-1} dz = (4x^6 - z^{4n}) dx .$$

Para que sea homogénea debemos tener  $2n - 1 = 2$  y  $4n = 6$ . Luego  $n = \frac{3}{2}$  y tenemos la ecuación homogénea

$$(4x^6 - z^6) dx = 3x^4 z^2 dz .$$

Por lo tanto

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4x^6 - z^6}{3x^4 z^2} = \frac{1}{3} \left[ 4 \left( \frac{x}{z} \right)^2 - \left( \frac{z}{x} \right)^4 \right] .$$

Poniendo  $z = xu$ , tenemos  $\frac{dz}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ , y reemplazando en la ecuación

$$x \frac{du}{dx} = -u + \frac{4}{3} \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3} u^4 = \frac{-3u^3 + 4 - u^6}{3u^2} .$$

Luego separando variables

$$\frac{3u^2 du}{u^6 + 3u^3 - 4} = -\frac{dx}{x} ,$$

es decir

$$\frac{3u^2 du}{\left(u^3 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} = -\frac{dx}{x} .$$

Separando en fracciones

$$\frac{1}{5} \left[ \frac{3u^2 du}{u^3 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}} - \frac{3u^2 du}{u^3 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}} \right] = -\frac{dx}{x},$$

o bien

$$\frac{3u^2 du}{u^3 - 1} - \frac{3u^2 du}{u^3 + 4} = -\frac{5dx}{x}.$$

Integrando obtenemos

$$\ln \left( \frac{u^3 - 1}{u^3 + 4} \right) = -5 \ln(x) + \ln(c),$$

y exponenciando

$$\frac{u^3 - 1}{u^3 + 4} = \frac{c}{x^5}.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u^3 = \frac{x^5 + 4c}{x^5 - c} &\implies u(x) = \left( \frac{x^5 + 4c}{x^5 - c} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\implies z(x) = x \left( \frac{x^5 + 4c}{x^5 - c} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\implies y(x) = z(x)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \left( \frac{x^5 + 4c}{x^5 - c} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.10.3** La ecuación

$$(2x^3y - 2y^3)dy = (3x^5 + 3x^2y^2)dx$$

se reduce a una ecuación homogénea haciendo un cambio de coordenadas de la forma  $x = u^p$ ,  $y = v^q$ , con  $p, q$  constantes adecuadas. Encuentre dichas constantes y resuelva la ecuación.

**Solución.** Tenemos

$$x = u^p \implies dx = pu^{p-1}du \quad \text{e} \quad y = v^q \implies dy = qv^{q-1}dv.$$

Sustituyendo nos queda

$$(2u^{3p}v^q - 2v^{3q})qv^{q-1}dv = (3u^{5p} + 3u^{2p}v^{2q})pu^{p-1}du,$$

es decir

$$2q(u^{3p}v^{2q-1} - v^{4q-1})dv = 3p(u^{6p-1} + u^{3p-1}v^{2q})du.$$

Al hacer  $2q = 3p$  cada término queda de grado  $6p - 1$ . Poniendo  $6p - 1 = 1$ , obtenemos  $p = \frac{1}{3}$  y  $q = \frac{1}{2}$ , y reemplazando en la ecuación

$$(u - v)dv = (u + v)du.$$

Esta ecuación ya fue resuelta en el Ejemplo 2.6.6, obteniéndose la solución implícita

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) = c.$$

Luego volviendo a las variables originales, se obtiene que la solución general cumple

$$\arctan\left(\frac{y^2}{x^3}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^6 + y^4) = c.$$

**Ejercicio 2.10.4** Haciendo los cambios de coordenadas  $u = \frac{1}{2}x^2$ ,  $v = \frac{1}{2}y^2$ , resuelva la ecuación

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0.$$

**Solución.** Tenemos

$$u = \frac{1}{2}x^2 \implies du = xdx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}y^2 \implies dv = ydy.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(4u + 6v - 7)du - (6u + 4v - 8)dv = 0.$$

Como la solución del sistema

$$\left. \begin{array}{l} 4u + 6v - 7 = 0 \\ 6u + 4v - 8 = 0 \end{array} \right\} \text{ es } u = 1, \quad v = \frac{1}{2},$$

hacemos el cambio de coordenadas

$$u = s + 1, \quad v = t + \frac{1}{2},$$

obteniendo la ecuación homogénea

$$(4s + 6t)ds - (6s + 4t)dt = 0.$$

Así

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3s + 2t}{2s + 3t} = \frac{3\frac{s}{t} + 2}{2\frac{s}{t} + 3},$$

y poniendo  $s = tz$ , tenemos  $\frac{ds}{dt} = z + t\frac{dz}{dt}$ , y la ecuación

$$z + t\frac{dz}{dt} = \frac{3z + 2}{2z + 3}.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{2z + 3}{z^2 - 1} dz = -\frac{2}{t} dt,$$

o bien

$$\frac{2z dz}{z^2 - 1} + \frac{3}{2} \left( \frac{dz}{z - 1} - \frac{dz}{z + 1} \right) = -\frac{2}{t} dt.$$

Integrando se tiene

$$\ln(z^2 - 1) + \frac{3}{2} (\ln(z - 1) - \ln(z + 1)) = -2 \ln(t) + \ln(c),$$

y exponenciando

$$(z^2 - 1) \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{c}{t^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{(z - 1)^{\frac{5}{2}}}{(z + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{t^2}.$$

Volviendo a las variables iniciales tenemos

$$\frac{(s - t)^{\frac{5}{2}}}{(s + t)^{\frac{1}{2}}} = c, \quad \frac{\left(u - v - \frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(u + v - \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = c,$$

y finalmente

$$\frac{(x^2 - y^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}{(x^2 + y^2 - 3)^{\frac{1}{2}}} = c.$$

**Ejercicio 2.10.5** Encuentre la solución general de la ecuación

$$(x - 2y + 4) dx + (2x - y + 2) dy = 0.$$

**Solución.** Como la solución del sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \text{ es } x = 0, \quad y = 2,$$

para obtener una ecuación homogénea hacemos el cambio de coordenadas

$$x = u, \quad y = v + 2.$$

Entonces

$$dx = du, \quad dy = dv,$$

y reemplazando, obtenemos

$$(u - 2v) du + (2u - v) dv = 0.$$

Para resolver esta ecuación ponemos  $v = tu$ , y como  $dv = t du + u dt$ , reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(u - 2tu) du + (2u - tu)(t du + u dt) = 0,$$

es decir

$$(1 - t^2) u du + (2 - t) u^2 dt = 0.$$

Separando variables se tiene

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -\frac{2-t}{1-t^2} dt \\ &= \frac{-2dt}{1-t^2} + \frac{t dt}{1-t^2} \\ &= -\frac{dt}{1+t} - \frac{dt}{1-t} + \frac{t dt}{1-t^2}, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} \ln(u) &= \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) - \frac{1}{2} \ln(1-t^2) + \ln(c) \\ &= \ln\left(\frac{1-t}{1+t} \frac{c}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \ln\left(c \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u = c \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pero

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x},$$

implica

$$\begin{aligned} x &= \frac{c \left(1 - \frac{y-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{y-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{c(x-y+2)^{\frac{1}{2}} x}{(x+y-2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Luego nuestra solución está dada por

$$\frac{(x+y-2)^{\frac{3}{2}}}{(x-y+2)^{\frac{1}{2}}} = c,$$

o bien elevando al cuadrado

$$\frac{(x+y-2)^3}{(x-y+2)} = \tilde{c}.$$

**Ejercicio 2.10.6** Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left( \frac{x+y+2}{x+y+1} \right)^2.$$

**Solución.** Como el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y + 2 &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

no tiene solución, hacemos la sustitución  $x + y = u$ . Luego  $dx + dy = du$ , y reemplazando obtenemos

$$\frac{du - dx}{dx} = 2 \left( \frac{u+2}{u+1} \right)^2.$$

Separando variables se tiene

$$\begin{aligned} \frac{(u+1)^2}{2(u+2)^2 + (u+1)^2} du &= dx \\ \frac{u^2 + 2u + 1}{3u^2 + 10u + 9} du &= dx \\ \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \frac{6u + 10}{3u^2 + 10u + 9} + \frac{2}{27} \frac{1}{\left(u + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} \right) du &= dx \end{aligned}$$

e integrando

$$\frac{1}{3} u - \frac{2}{9} \ln(3u^2 + 10u + 9) + \frac{\sqrt{2}}{9} \arctan\left(\frac{3u+5}{\sqrt{2}}\right) = x + c.$$

Luego nuestra solución general satisface

$$\frac{1}{3}(x+y) - \frac{2}{9} \ln(3(x+y)^2 + 10(x+y) + 9) + \frac{\sqrt{2}}{9} \arctan\left(\frac{3(x+y)+5}{\sqrt{2}}\right) = x + c.$$

**Ejercicio 2.10.7** a) Muestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^m y^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se transforma en ecuación de variables separadas usando el cambio de variables  $y = vx$ .

b) Use a) para encontrar la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2}.$$

**Solución.** a) El cambio de variables

$$y = vx \implies \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + x^{m+n} v^n f(v),$$

es decir

$$\frac{dv}{v^n f(v)} = x^{m+n-1} dx$$

que es de variables separadas.

b) La ecuación se escribe de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^0 y^{-2} \sec^2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Luego  $m = 0, n = -2$  y  $f(v) = \sec^2(v)$  y la ecuación queda de la forma

$$\frac{dv}{v^{-2} \sec^2(v)} = x^{-3} dx,$$

o bien

$$v^2 \cos^2(v) dv = x^{-3} dx.$$

Como

$$\int v^2 \cos^2(v) dv = \frac{1}{6} v^3 + \frac{1}{4} v^2 \sin(2v) + \frac{1}{4} v \cos(2v) - \frac{1}{8} \sin(2v) + c,$$

nuestra solución  $v = v(x)$  verifica

$$\frac{1}{6} v^3 + \left(\frac{v^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin(2v) + \frac{v}{4} \cos(2v) = -\frac{x^2}{2} + c.$$

Por lo tanto, la solución  $y = y(x)$  de nuestra ecuación verifica la ecuación

$$4y^3 + 3x(2y^2 - x^2) \sin\left(\frac{2y}{x}\right) + 6x^2 y \cos\left(\frac{2y}{x}\right) + 12x = cx^3.$$

**Ejercicio 2.10.8** Encuentre la solución particular de la ecuación

$$\left[ \frac{\ln(\ln(y))}{x} + \frac{2}{3}xy^3 + 6x \right] dx + \left[ \frac{\ln(x)}{y \ln(y)} + x^2y^2 + 4e^{-2y} \right] dy = 0$$

que pasa por el punto  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

**Solución.** Sean

$$M(x, y) = \frac{\ln(\ln(y))}{x} + \frac{2}{3}xy^3 + 6x, \quad N(x, y) = \frac{\ln(x)}{y \ln(y)} + x^2y^2 + 4e^{-2y}.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{xy \ln(y)} + 2xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

nuestra ecuación es exacta. Luego para resolverla integramos  $M(x, y)$  con respecto a  $x$  obteniendo

$$u(x, y) = \ln(\ln(y)) \ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 + g(y).$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\ln(x)}{y \ln(y)} + x^2y^2 + g'(y),$$

e igualando con  $N(x, y)$  se obtiene la relación

$$g'(y) = 4e^{-2y}.$$

Luego

$$g(y) = -2e^{-2y}, \quad \text{y} \quad u(x, y) = \ln(\ln(y)) \ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 - 2e^{-2y}.$$

De esta forma la solución general satisface

$$\ln(\ln(y)) \ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 - 2e^{-2y} = c.$$

Evaluando en  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  obtenemos  $c = \frac{73}{24} - \frac{2}{e}$ . Por lo tanto la solución buscada  $y = y(x)$  verifica la ecuación

$$\ln(\ln(y)) \ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 - 2e^{-2y} = \frac{73}{24} - \frac{2}{e}.$$

**Ejercicio 2.10.9** Demuestre que  $\mu(x, y) = xy^2$  es factor integrante de la ecuación

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0.$$

Use este factor integrante para resolver la ecuación.

**Solución.** La ecuación multiplicada por  $\mu(x, y) = xy^2$  queda

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0. \quad (2.1)$$

Si

$$M(x, y) = 2xy^3 - 6x^2y^2 \quad \text{y} \quad N(x, y) = 3x^2y^2 - 4x^3y,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2y.$$

Así la ecuación (2.1) es exacta y por lo tanto  $\mu(x, y) = xy^2$  es factor integrante de la ecuación inicial.

Para resolver la ecuación integramos  $M(x, y)$  con respecto a  $x$  obteniendo

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx = x^2y^3 - 2x^3y^2 + h(y).$$

Para calcular  $h(y)$  imponemos la condición

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

obteniéndose la ecuación

$$3x^2y^2 - 4x^3y + h'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y.$$

Luego

$$h'(y) = 0 \quad \implies \quad h(y) = 0.$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

y la solución general de nuestra ecuación está dada implícitamente por la ecuación

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.10.10** Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y^2}{2y}, \quad y(0) = 1$$

y determine el intervalo máximo donde está definida la solución.

**Solución.** Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y^2}{2y} \iff 2ydy = (x + y^2)dx \iff (x + y^2)dx - 2ydy = 0.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} M(x, y) &= x + y^2 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad y \\ N(x, y) &= -2y \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \neq 0$$

y la ecuación no es exacta. Pero como

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -1$$

depende sólo de  $x$ , nuestra ecuación admite como factor integrante a la función

$$\mu(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x}.$$

Multiplicando nuestra ecuación por este factor integrante obtenemos la ecuación diferencial exacta

$$e^{-x}(x + y^2)dx + -2ye^{-x}dy = 0.$$

Luego existe función  $F$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x}(x + y^2) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2ye^{-x}.$$

Por lo tanto

$$F(x, y) = \int xe^{-x}dx + y^2 \int e^{-x}dx + \phi(y) \implies F(x, y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + \phi(y).$$

Pero

$$-2ye^{-x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 - 0 - 2ye^{-x} + \phi'(y)$$

lo que implica

$$\phi'(y) = 0 \implies \phi(y) = c,$$

y entonces

$$F(x, y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + c.$$

Finalmente como para  $x = 0$  debemos tener  $y = 1$ , el valor de nuestra constante  $c$  es 2. Luego la solución buscada  $y = y(x)$  verifica

$$-xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + 2 = 0$$

lo que implica

$$y(x)^2 = 2e^x - x - 1.$$

Como  $y(0) = 1$ , nuestra solución es

$$y(x) = \sqrt{2e^x - x - 1}.$$

Para determinar el intervalo máximo donde la solución está definida, llamemos  $f(x) = 2e^x - x - 1$ . Luego  $f'(x) = 2e^x - 1$  y  $f'(x) = 0 \iff x = -\ln(2)$ . Como  $f(-\ln(2)) = \ln(2) > 0$  y  $f''(x) = 2e^x > 0$ , tenemos que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Esto implica que el intervalo máximo donde la solución está definida es todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.10.11** Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$(y \ln(y) - 2xy)dx + (x + y^3 e^y)dy = 0.$$

**Solución.** Poniendo

$$M(x, y) = y \ln(y) - 2xy \quad \text{y} \quad N(x, y) = x + y^3 e^y,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \ln(y) - 2x \implies -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}(x, y) = -\frac{1}{y}.$$

Luego tenemos el factor integrante que depende solo de  $y$

$$\mu(x, y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln(y)} = \frac{1}{y}.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$(\ln(y) - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} + y^2 e^y\right)dy = 0.$$

Entonces

$$u(x, y) = \int (\ln(y) - 2x)dx + g(y) = \ln(y)x - x^2 + g(y),$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y} + g'(y).$$

Comparando esto con  $\frac{x}{y} + y^2 e^y$  obtenemos  $g'(y) = y^2 e^y$ .

Así

$$\begin{aligned} g(y) &= \int y^2 e^y dy = y^2 e^y - 2 \int y e^y dy = y^2 e^y - 2(y e^y - e^y) \\ &= (y^2 - 2y + 2)e^y, \end{aligned}$$

y tenemos

$$u(x, y) = \ln(y)x - x^2 + (y^2 - 2y + 2)e^y.$$

Luego nuestra solución general está dada por la ecuación implícita

$$\ln(y)x - x^2 + (y^2 - 2y + 2)e^y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.10.12** Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

tiene factor integrante de la forma  $\mu(x, y) = h(x + y)$ .

**Solución.** Si  $\mu(x, y) = h(x + y)$ , tenemos

$$\frac{\partial \ln(\mu(x, y))}{\partial x} = \frac{h'(x + y)}{h(x + y)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln(\mu(x, y))}{\partial y} = \frac{h'(x + y)}{h(x + y)},$$

y la ecuación del factor integrante queda de la forma

$$\frac{h'(x + y)}{h(x + y)} [N(x, y) - M(x, y)] = \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

lo que implica

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x, y) = \frac{h'(x + y)}{h(x + y)} = f(x + y).$$

Luego nuestra condición es

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x, y) = f(x + y) \quad (\text{dependa sólo de } x + y).$$

En este caso el factor integrante es

$$\mu(x, y) = h(x + y) \quad \text{donde} \quad h(u) = e^{\int f(u) du}.$$

**Ejercicio 2.10.13** Use lo anterior para encontrar la solución general de:

$$(7x^3 + 3x^2y + 4y) dx + (4x^3 + x + 5y) dy = 0.$$

**Solución.** Poniendo

$$M(x, y) = 7x^3 + 3x^2y + 4y \quad \text{y} \quad N(x, y) = 4x^3 + x + 5y,$$

tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x, y) = \frac{3(1 - 3x^2)}{-3x^3 - 3x^2y + y + x} = \frac{3}{x + y} = f(x + y).$$

Luego

$$f(u) = \frac{3}{u} \implies h(u) = e^{\int f(u)du} = u^3,$$

y nuestro factor integrante es

$$\mu(x, y) = (x + y)^3.$$

Sea entonces

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x, y) &= (x + y)^3 M(x, y) = 7x^6 + 24x^5y + 30x^4y^2 + 16x^3y^3 + \\ &\quad 3x^2y^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 12xy^3 + 4y^4 \quad y \\ \tilde{N}(x, y) &= (x + y)^3 N(x, y) = 4x^6 + 12x^5y + 12x^4y^2 + 4x^3y^3 + \\ &\quad x^4 + 8x^3y + 18x^2y^2 + 16xy^3 + 5y^4. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \tilde{M}(x, y)dx = x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4 + \\ &\quad x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + g(y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 4x^6 + 12x^5y + 12x^4y^2 + 4x^3y^3 + x^4 + 8x^3y + 18x^2y^2 + 16xy^3 + g'(y),$$

y comparando con  $\tilde{N}(x, y)$  obtenemos

$$g'(y) = 5y^4 \implies g(y) = y^5.$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4 + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5,$$

y entonces nuestra solución general viene dada en forma implícita por la ecuación

$$x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4 + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.10.14** Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

tiene factor integrante de la forma  $\mu(x, y) = h(xy)$ .

**Solución.** Si  $\mu(x, y) = h(xy)$ , tenemos

$$\frac{\partial \ln(\mu(x, y))}{\partial x} = \frac{h'(xy)}{h(xy)} \cdot y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln(\mu(x, y))}{\partial y} = \frac{h'(xy)}{h(xy)} \cdot x,$$

y la ecuación del factor integrante queda de la forma

$$\frac{h'(xy)}{h(xy)} [yN(x, y) - xM(x, y)] = \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

lo que implica

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x, y) = \frac{h'(xy)}{h(xy)} = f(xy).$$

Luego nuestra condición es

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x, y) = f(xy) \text{ (dependa sólo de } xy\text{)}.$$

En este caso el factor integrante es

$$\mu(x, y) = h(xy) \quad \text{donde} \quad h(u) = e^{\int f(u) du}.$$

**Ejercicio 2.10.15** Use lo anterior para resolver la ecuación

$$y(x^2y^2 + 2)dx + 2x(1 - x^2y^2)dy = 0.$$

**Solución.** Poniendo

$$M(x, y) = y(x^2y^2 + 2) \quad \text{y} \quad N(x, y) = 2x(1 - x^2y^2),$$

tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x, y) = -\frac{3}{xy} = f(xy).$$

Luego

$$f(u) = -\frac{3}{u} \implies h(u) = e^{\int f(u) du} = u^{-3},$$

y nuestro factor integrante es

$$\mu(x, y) = (xy)^{-3}.$$

Sea entonces

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x, y) &= (xy)^{-3}M(x, y) = x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2} & \text{y} \\ \tilde{N}(x, y) &= (xy)^{-3}N(x, y) = 2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1}. \end{aligned}$$

De esta forma

$$u(x, y) = \int \tilde{M}(x, y) dx = \ln(x) - x^{-2}y^{-2} + g(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x^{-2}y^{-3} + g'(y),$$

y comparando con  $\tilde{N}(x, y)$  obtenemos

$$g'(y) = -2y^{-1} \implies g(y) = -2\ln(y).$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = \ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y),$$

y entonces nuestra solución general viene dada en forma implícita por la ecuación

$$\ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.10.16** a) Demuestre que la ecuación  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  bajo la condición  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} = f(x + y^2)$ , tiene factor integrante de la forma  $\mu(x, y) = h(x + y^2)$ .  
b) Aplique para encontrar la solución general de

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0.$$

**Solución.** a) La ecuación del factor integrante es

$$N \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} - M \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sea  $z = x + y^2$  y pongamos  $\mu = \mu(z)$ . Entonces

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \cdot 2y.$$

Reemplazando en la ecuación del factor integrante obtenemos

$$(N - 2yM) \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

o bien

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM}.$$

Luego la condición para tener un factor integrante de la forma  $\mu(x, y) = h(x + y^2)$  es que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} = f(x + y^2).$$

b) Tenemos

$$M(x, y) = 3x + 2y + y^2, \quad N(x, y) = x + 4xy + 5y^2.$$

Por lo tanto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} = \frac{1}{x + y^2},$$

es decir

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} = \frac{1}{z},$$

lo que implica

$$\mu(z) = z \implies \mu(x, y) = x + y^2.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0.$$

Entonces

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + g(y),$$

lo que implica

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + g'(y).$$

Comparando con la ecuación diferencial obtenemos

$$g'(y) = 5y^4 \implies g(y) = y^5.$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5$$

y nuestra solución general está dada implícitamente por la ecuación

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.10.17** Resolver la ecuación diferencial

$$(7x^4y - 3y^8)dx + (2x^5 - 9xy^7)dy = 0,$$

sabiendo que existe un factor integrante de la forma  $x^m y^n$ .

**Solución.** Nuestra ecuación multiplicada por  $x^m y^n$  es

$$(7x^{m+4}yn + 1 - 3x^m y^{n+8}) dx + (2x^{m+5}y^n - 9x^{m+1}y^{n+7}) dy = 0$$

. Poniendo

$$M(x, y) = 7x^{m+4}yn + 1 - 3x^m y^{n+8} \quad y \quad N(x, y) = 2x^{m+5}y^n - 9x^{m+1}y^{n+7},$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 7(n+1)x^{m+4}y^n - 3(n+8)x^m y^{n+7} \quad y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2(m+5)x^{m+4}y^n - 9(m+1)x^m y^{n+7}.$$

Por lo tanto la ecuación será exacta si

$$\begin{aligned} 7(n+1) &= 2(m+5) \\ 3(n+8) &= 9(m+1), \end{aligned}$$

lo que implica  $m = 2$  y  $n = 1$ .

Luego

$$M(x, y) = 7x^6y^2 - 3x^2y^9 \quad y \quad N(x, y) = 2x^7y - 9x^3y^8.$$

Integrando  $M(x, y)$  con respecto a  $x$  obtenemos

$$u(x, y) = x^7y^2 - x^3y^9 + h(y).$$

Así

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x^7y - 9x^3y^8 + h'(y),$$

y comparando con  $N(x, y)$ , concluimos que

$$h'(y) = 0 \quad \implies \quad h(y) = 0.$$

Por lo tanto la solución general en forma implícita es

$$x^7y^2 - x^3y^9 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.10.18** Encuentre la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \tan(x)y = -x \operatorname{sen}(x)y^3.$$

**Solución.** Dividiendo por  $y^{-3}$  obtenemos

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \tan(x) y^{-2} = -x \operatorname{sen}(x),$$

y nuestro cambio de coordenadas es

$$z = y^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx},$$

y por lo tanto

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \text{y} \quad y^{-3} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dx}.$$

Reemplazando en nuestra ecuación y multiplicando por  $-2$  tenemos la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} - \tan(x)z = 2x \operatorname{sen}(x).$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$\frac{dz}{dx} = \tan(x)z.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dz}{z} = \tan(x) dx,$$

e integrando

$$\ln(z) = -\ln(\cos(x)) + \ln(c) = \ln\left(\frac{c}{\cos(x)}\right),$$

y exponenciando

$$z = \frac{c}{\cos(x)}.$$

Buscamos entonces una solución de la ecuación no homogénea de la forma

$$z(x) = \frac{c(x)}{\cos(x)}.$$

Reemplazando en ella obtenemos la relación

$$\frac{c'(x)}{\cos(x)} = 2x \operatorname{sen}(x) \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = 2x \operatorname{sen}(x) \cos(x) = x \operatorname{sen}(2x),$$

e integrando por partes

$$c(x) = \int x \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + c.$$

Por lo tanto

$$z(x) = \frac{-\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + c}{\cos(x)},$$

y luego

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \sqrt{\frac{\cos(x)}{-\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + c}}.$$

**Ejercicio 2.10.19** Resolver el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{3}[(1 - 2t)y^4 - y], \quad y(0) = 1.$$

**Solución.** Esta ecuación es del tipo Bernoulli y la podemos escribir de la forma

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 - 2t)y^4,$$

y multiplicando por  $y^{-4}$  nos queda

$$y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{3}(1 - 2t).$$

Sea  $u = y^{-3}$ . Por lo tanto  $u' = -3y^{-4}y'$  y  $y^{-4}y' = -\frac{1}{3}u'$ .

Reemplazando obtenemos

$$-\frac{1}{3}u' + \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}(1 - 2t),$$

o bien

$$u' - u = 2t - 1, \quad u(0) = 1.$$

La solución de la correspondiente ecuación homogénea es

$$u_h(t) = ce^t.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos solución de la ecuación no-homogénea de la forma

$$u(t) = c(t)e^t.$$

Luego debemos tener

$$c'(t)e^t = 2t - 1 \implies c'(t) = (2t - 1)e^{-t}.$$

Así

$$c(t) = \int (2t - 1)e^{-t} dt = -(1 + 2t)e^{-t} + c_1,$$

y por lo tanto

$$u(t) = -(1 + 2t) + c_1 e^t.$$

La condición inicial  $u(0) = 1$  implica  $c_1 = 2$ . Obtenemos así

$$u(t) = -(1 + 2t) + 2e^t,$$

y entonces

$$y(t) = [-(1 + 2t) + 2e^t]^3.$$

**Ejercicio 2.10.20** Considere la ecuación diferencial

$$y' + 2(1 - x)y - y^2 = x(x - 2).$$

- Encuentre solución particular de la forma  $y = Ax + B$ .
- Encuentre la solución general.
- Encuentre la solución particular que pasa por el punto  $(2, 2)$  y el intervalo máximo donde está definida.

**Solución.** a) Poniendo  $y_1(x) = Ax + B$  tenemos  $y_1'(x) = A$  y reemplazando en la ecuación

$$A + 2(1 - x)(Ax + B) - (Ax + B)^2 = x(x - 2),$$

es decir

$$A + 2B - B^2 + (2A - 2B - 2AB)x + (-2A - A^2)x^2 = -2x + x^2,$$

que implica

$$A = -1 \quad \text{y} \quad B = 1 \implies y_1(x) = 1 - x.$$

b) Como nuestra ecuación es una ecuación de Ricatti, hacemos la sustitución

$$y = 1 - x + \frac{1}{z}.$$

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx},$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-1 - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} + 2(1-x) \left(1-x + \frac{1}{z}\right) - \left(1-x + \frac{1}{z}\right)^2 = x(x-2),$$

que se reduce a

$$\frac{dz}{dx} = -1.$$

Por lo tanto

$$z(x) = -x + c$$

Luego la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{c-x}.$$

c) Para encontrar la solución que pasa por el punto  $(2, 2)$  debemos tener

$$2 = 1 - 2 + \frac{1}{c-2} \implies c = \frac{7}{3}.$$

Luego la solución particular buscada es

$$y_2(x) = 1 - x + \frac{3}{7-3x},$$

y como  $2 < \frac{7}{3}$  el intervalo máximo donde está definida es  $\left]-\infty, \frac{7}{3}\right[$ .

**Ejercicio 2.10.21** Para  $x > 0$  considere la ecuación de Riccati

$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y = -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3).$$

a) Encuentre solución particular de la forma  $y_1(x) = e^{2x}(Ax+B)$ .

b) Encuentre su solución general.

**Solución.** a) Si

$$y(x) = e^{2x}(Ax+B),$$

tenemos

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{2x}[A+2B+2Ax], \\ e^{-2x}y(x)^2 &= e^{2x}[B^2+2ABx+A^2x^2], \\ -\frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y(x) &= -\frac{e^{2x}}{x}(1+4x+2x^2)(Ax+B) \\ &= -\frac{e^{2x}}{x}[B+(A+4B)x+(4A+2B)x^2+2Ax^3]. \end{aligned}$$

Luego reemplazando obtenemos

$$-\frac{e^{2x}}{x} (1 + x + 2x^2 + x^3) = -\frac{e^{2x}}{x} [B + 2Bx + (2A + 2B - 2AB)x^2 + (2A - A^2)x^3],$$

y por lo tanto

$$B = 1, \quad A = 1.$$

De esta forma la solución particular es

$$y_1(x) = e^{2x} (x + 1).$$

b) Como es una ecuación de Riccati hacemos el cambio de coordenadas

$$y = y_1 + \frac{1}{v}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_1'(x) - \frac{v'(x)}{v(x)^2}, \\ e^{-2x} y(x)^2 &= e^{-2x} [y_1(x)^2 + 2 \frac{y_1(x)}{v(x)} + \frac{1}{v(x)^2}], \\ -\frac{1}{x} (1 + 4x + 2x^2) y(x) &= -\frac{1}{x} (1 + 4x + 2x^2) [y_1(x) + \frac{1}{v(x)}], \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} y_1'(x) - \frac{v'(x)}{v(x)^2} + e^{-2x} [y_1(x)^2 + 2 \frac{y_1(x)}{v(x)} + \\ \frac{1}{v(x)^2}] - \frac{1}{x} (1 + 4x + 2x^2) [y_1(x) + \frac{1}{v(x)}] = f(x), \end{aligned}$$

donde  $f(x) = -\frac{e^{2x}}{x} (1 + x + 2x^2 + x^3)$ .

Es decir

$$\begin{aligned} y_1'(x) + e^{-2x} y_1(x)^2 - \frac{1}{x} (1 + 4x + 2x^2) y_1(x) - \\ \frac{v'(x)}{v(x)^2} + e^{-2x} [2 \frac{y_1(x)}{v(x)} + \frac{1}{v(x)^2}] - \frac{1}{x} (1 + 4x + 2x^2) \frac{1}{v(x)} = f(x). \end{aligned}$$

Como  $y_1(x)$  es solución, la relación anterior se reduce a

$$-\frac{v'(x)}{v(x)^2} + e^{-2x} [2 \frac{y_1(x)}{v(x)} + \frac{1}{v(x)^2}] - \frac{1}{x} (1 + 4x + 2x^2) \frac{1}{v(x)} = 0.$$

Multiplicando por  $v(x)^2$  se obtiene

$$\begin{aligned} v'(x) &= e^{-2x} [2y_1(x)v(x) + 1] - \frac{1}{x}(1 + 4x + 2x^2)v(x) \\ &= \left[ 2e^{-2x}y_1(x) - \frac{1}{x}(1 + 4x + 2x^2) \right] v(x) + e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{x}[1 + 2x]v(x) + e^{-2x}. \end{aligned}$$

Luego tenemos la ecuación lineal

$$v'(x) = -\frac{1}{x}[1 + 2x]v(x) + e^{-2x},$$

cuya solución es

$$v(x) = e^{\int a(x)dx} \left[ \int e^{-\int a(x)dx} e^{-2x} dx + c \right],$$

donde  $a(x) = -\frac{1}{x}[1 + 2x]$ .

Como

$$\int a(x)dx = -\int \frac{1}{x}[1 + 2x]dx = -(\ln(x) + 2x),$$

Tenemos

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{x}e^{-2x} \left[ \int x e^{2x} e^{-2x} + c \right] \\ &= \frac{1}{x}e^{-2x} \left[ \frac{x^2}{2} + c \right]. \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación original es

$$y(x) = e^{2x}(x + 1) + \frac{2xe^{2x}}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$