Ecuaciones Diferenciales [1]
Capítulo 2
Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

V. Guíñez, R. Labarca y M. Martínez
Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile

[1]Este trabajo fue financiado por el Proyecto de Docencia Usach VG9813

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

2.1 Preliminares

Dado un subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f : \Lambda \to \mathbb{R}$, consideramos el problema de encontrar un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y una función diferenciable $\phi : I \to \mathbb{R}$, tal que para todo $t \in I$,

(a) $(t, \phi(t)) \in \Lambda$, y

(b) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$.

Este problema es llamado: **ecuación diferencial ordinaria de orden 1**, y es denotado por

$$y' = f(t, y)\,. \tag{2.1}$$

Si tal función ϕ existe y verifica (a) y (b) en I, entonces ϕ es llamada una **solución** de (2.1) en I.

2.2 Ejemplos preliminares

Consideremos primero el caso en que f es independiente de y, es decir, consideremos la ecuación

$$y' = f(t)\,, \tag{2.2}$$

donde f está definida en algún intervalo abierto I. El problema es encontrar una función diferenciable ϕ en I, tal que $\phi'(t) = f(t)$. Este problema ya fue estudiado en cálculo, y sabemos que si f es continua sobre I, la función ψ definida por

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds\,,$$

donde t_0 es algún punto fijo de I, es una solución de (2.2). Además si ϕ es cualquier solución de (2.2), entonces para todo $t \in I$

$$\phi'(t) - \psi'(t) = f(t) - f(t) \equiv 0$$

lo que implica que existe una constante c tal que

$$\phi(t) = \psi(t) + c \,, \quad \forall t \in I \,. \tag{2.3}$$

Observe que cualquier función de la forma (2.3) es solución. Así todas las soluciones de (2.2) son conocidas en el caso en que f es continua sobre I, y todo se reduce a un problema de integración.

Consideremos ahora la ecuación

$$y' = ky \,, \tag{2.4}$$

que sirve de modelo para el crecimiento de poblaciones si $k > 0$ o de desintegración radiactiva si $k < 0$. Primero que nada tenemos la solución obvia $\phi(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos también verificar fácilmente que dada una constante c arbitraria, funciones de la forma

$$\phi(t) = ce^{kt} \tag{2.5}$$

son soluciones, que están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ y nunca se anulan si $c \neq 0$. Por otra parte si $\psi(t)$ es una solución cualquiera de (2.4), que es positiva en un intervalo I, tenemos para todo $t \in I$

$$k = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \,,$$

lo que implica, vía integración, que para t_0 fijo en I

$$k(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} ds \,, \tag{2.6}$$

y haciendo la sustitución $u = \psi(s)$, obtenemos

$$k(t - t_0) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} \frac{1}{u} du = \ln(\frac{\psi(t)}{\psi(t_0)}) \,.$$

Finalmente, exponenciando se obtiene para todo $t \in I$

$$\psi(t) = \psi(t_0) e^{k(t - t_0)} \tag{2.7}$$

que es de la forma (2.5) y está en realidad definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si partimos ahora con una solución ψ que es negativa en el intervalo I, en (2.6) debemos hacer la sustitución $u = -\psi(s)$ obteniéndose

$$k(t-t_0) = \int_{-\psi(t_0)}^{-\psi(t)} \frac{1}{u} du = \ln(\frac{\psi(t)}{\psi(t_0)})\,,$$

y se llega nuevamente a la función (2.7).

Estableceremos en la sección subsiguiente, que para condiciones bien generales sobre la función $f(t,y)$ (que son verificadas por $f(t,y) = ky$), si dos soluciones ϕ y ψ de

$$y' = f(t,y)$$

definidas sobre el mismo intervalo abierto J, coinciden en un punto $t_0 \in J$, entonces $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in J$.

Usando esto podemos entonces concluir, que todas las soluciones de (2.4) son de la forma (2.5).

2.3 Campos de direcciones e isoclinas

El problema planteado por la ecuación $y' = f(t,y)$ tiene una interpretación geométrica simple. Para facilitar, supongamos f está definida para todos los valores de t e y. Entonces para cada punto (t,y) en el plano tenemos el número real $f(t,y)$. ¿ Qué significa este número ? Nuestros ejemplos sugieren que es la razón de cambio de y con respecto de t en ese punto. Para interpretar esto geométricamente pensemos en una línea recta, o un segmento de línea recta, de pendiente $f(t,y)$ por el punto (t,y). La longitud de tal segmento no importa; solo su pendiente interesa. Así a todo punto del plano es asignado un segmento de línea recta o, lo que es lo mismo, una pendiente. Observe que no hay segmentos paralelos al eje y, tales segmentos tienen pendiente *infinita* y correspondería a puntos en donde f no está definida. La correspondencia de líneas rectas (o pendientes) a puntos del plano (t,y) será llamado un **campo de direcciones**. La Figura 4 muestra una parte del campo de direcciones de la ecuación $dy/dt = ky$ con $k = 2$. El carácter autónomo de la ecuación (f es independiente de t) se refleja en el hecho que puntos sobre una línea paralela al eje t se les asigna la misma pendiente: la pendiente en el punto (t,y) es $2y$, y por lo tanto es independiente de t.

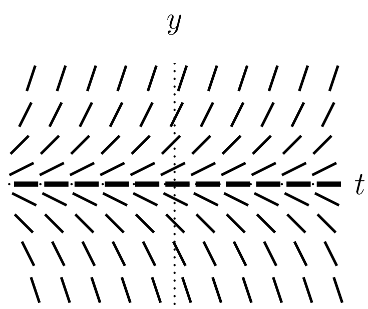

Figura 4

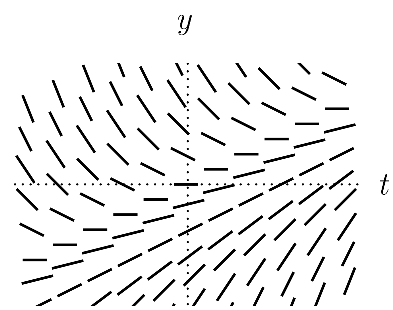

Figura 5

La Figura 5 muestra el campo de direcciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = t - 2y\,. \tag{2.8}$$

En ambos ejemplos, la función f está definida en todo el plano (t, y). Ejemplos de ecuaciones diferenciales definidas solamente en una parte del plano son $dy/dt = \sqrt{ty}$, que está definida solo para $ty \geq 0$, es decir, en el primer y cuarto cuadrante incluyendo sus fronteras, y la ecuación $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2-y^2}}$ que está solamente definida para $t^2 + y^2 < 1$, es decir, en el interior del círculo de centro en el origen y radio 1.

Las curvas $f(t, y) =$ constante son llamadas **isoclinas** de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$. A menudo es más fácil dibujar el campo de direcciones si previamente se dibujan algunas isoclinas. Observe que las isoclinas de una ecuación autónoma son rectas paralelas al eje t. Las isoclinas de la ecuación (2.8) son las rectas $t - 2y = c$.

Supongamos ahora que podemos encontrar una curva en el plano (t, y) que es tangente en cada uno de sus puntos a la recta asignada a ese punto por la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$. Tales curvas tienen, por definición, una tangente en cada uno de sus puntos. Como estas tangentes nunca son paralelas al eje y, la curva es el gráfico $y = \phi(t)$ de una función ϕ definida sobre algún intervalo del eje t y tiene derivada en cada punto de este intervalo. La pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto $(t, \phi(t))$ es, por definición, la pendiente $f(t, \phi(t))$ asignado a ese punto. Por otra parte, esta pendiente es igual a $\phi'(t)$, el valor de la derivada de ϕ en t. Así $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ para todo t en el intervalo de definición de ϕ. Luego ϕ es una solución de la ecuación diferencial.

Inversamente, si tenemos una función ϕ que es una solución de $y' = f(t, y)$, es obvio que su gráfico $y = \phi(t)$ es tangente en cada uno de sus puntos a la recta asignada a ese punto por la ecuación diferencial.

Llamaremos **curva solución** al gráfico de una solución. Las Figuras 6 y 7 muestran algunas curvas solución de las ecuaciones (2.4) con $k = 2$ y de (2.8), respectivamente.

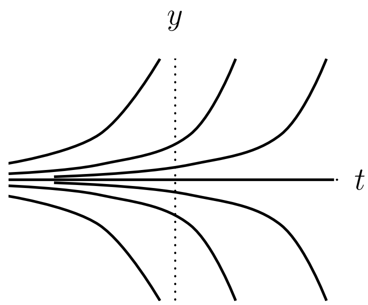

Figura 6

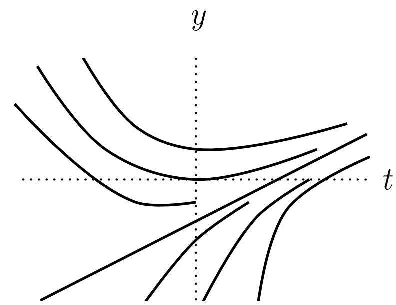

Figura 7

2.4 Existencia y unicidad de soluciones

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}\,.$$

Es fácil comprobar que las funciones $u(t) = 0$ y $v(t) = t^3$ son soluciones, que ambas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, y que $u(0) = v(0) = 0$. Es decir ambas curvas solución pasan por el punto $(0,0)$ y por supuesto $u \neq v$.
Por otra parte si consideramos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{- \mid y - t \mid}\,,$$

que está definida solo sobre la recta $y = t$, podemos comprobar fácilmente que no tiene soluciones. En efecto, nuestra función $f(t,y) = 0$ para todo (t,y) en su dominio de definición. Si existiera solución u, esta tendría que estar definida sobre algún intervalo abierto $a < t < b$ y para cada t en ese intervalo deberíamos tener: $(t, u(t))$ pertenece al dominio de definición de f, lo que implica $u(t) = t$; y además $u'(t) = f(t, u(t)) = 0$, lo cual no es posible.

Estos ejemplos nos muestran que es posible que una ecuación diferencial no tenga soluciones, y que también es posible que dos curvas soluciones diferentes de la misma ecuación diferencial de primer orden se intercepten entre sí. Queremos excluir tales casos. Queremos estar seguros que una curva solución pasa por cada punto de la región donde la ecuación diferencial está definida, y también deseamos estar seguros que solamente una curva solución pasa por cada punto. La primera de estas demandas parece más razonable que la segunda. Hay muchas razones puramente matemáticas para esta última, pero las más simple es más científica que matemática. Cuando decimos que un sistema físico es *gobernado* por una ecuación de primer orden $dy/dt = f(t,y)$, queremos decir que si en el instante t_0 el sistema está en el estado y_0, sus estados futuros están completamente determinados por la ecuación diferencial - esto es, guiados por el campo de direcciones. De esta forma una ecuación diferencial puede gobernar un sistema físico solamente si a un punto dado (t_0, y_0), le corresponde exactamente una solución u que satisface $u(t_0) = y_0$. Cuando este es el caso, decimos que la ecuación tiene la propiedad de la *unicidad*. Afortunadamente, es posible garantizar que una ecuación tiene la propiedad de la unicidad si la función f tiene ciertas propiedades que pueden ser verificadas directamente.

Para establecer este resultado necesitamos una definición. Decimos que un subconjunto D del plano es *abierto* si todo punto de D es el centro de un rectángulo abierto que está contenido en D. Más precisamente, D es abierto si para todo punto (t_0, y_0) en D, existen números positivos a y b tales que cualquier punto (t, y) satisfaciendo $\mid t-t_0 \mid< a$ y $\mid y-y_0 \mid< b$ también pertenece a D. El plano mismo es abierto; otros ejemplos son (1) el conjunto de los puntos (t, y) satisfaciendo $t^2 + y^2 < 1$; (2) el conjunto de los puntos (t, y) satisfaciendo $y < 0$; (3) el plano menos una línea. Ejemplos de conjuntos que no son abiertos son (1) una línea; (2) el conjunto $y \geq 0$; (3) el conjunto $0 < t < 1, 0 \leq y < 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de establecer el teorema fundamental de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden. Su demostración, y la demostración de los Teoremas 2.4.2 y 2.4.3, que son consecuencia de éste, necesitan un mayor manejo de conceptos matemáticos y serán omitidas en esta presentación.

Teorema 2.4.1 *Sea D un conjunto abierto del plano (t, y) y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga además que f tiene derivada parcial con respecto a y en todo punto de D y que $\partial f/\partial y$ es continua sobre D. Sea (t_0, y_0) un punto de D. Entonces la ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$ tiene una solución u definida en un intervalo alrededor de t_0 que verifica $u(t_0) = y_0$. Más aún, si v es una solución definida en el mismo intervalo que u, y $v(t_0) = y_0$, entonces $v = u$.*

El punto (t_0, y_0) es frecuentemente llamado una *condición inicial*, y el problema de encontrar una solución u tal que $u(t_0) = y_0$ es llamado un *problema de valores iniciales*. El Teorema (2.4.1) podríamos interpretarlo diciendo que bajo ciertas circunstancias un problema de valores iniciales tiene una única solución. Si pensamos un poco nos daremos cuenta que esta no es una descripción muy correcta del teorema, y más aún nos daríamos cuenta que no hemos sido muy precisos al introducir el concepto de unicidad. Como lo hemos planteado ninguna ecuación de primer orden tiene la propiedad de la unicidad. En efecto, si tenemos una solución cuyo gráfico pasa por un punto dado, siempre podemos encontrar otra solución diferente cuyo gráfico pasa por el mismo punto: basta tomar como intervalo de definición de la segunda solución un intervalo un poco más pequeño que el intervalo de definición de la solución original, y definir la segunda solución de la misma forma que la primera.

Sea u una solución de $dy/dt = f(t, y)$ definida sobre un intervalo I. Sea v una solución definida sobre un intervalo I' que contiene al intervalo I pero no coincide con él. Si $v(t) = u(t)$ para todo t en I, diremos que v es una **continuación** de u. El gráfico de u es entonces simplemente una parte del gráfico de v. Si u no tiene continuación, diremos que u es una solución **máxima**. Asumiendo que f satisface el Teorema (2.4.1), una solución definida sobre un intervalo de la forma $[a, b]$ no puede ser máxima. En efecto, si ponemos $t_1 = b$ y $y_1 = u(t_1)$ y aplicamos el teorema al punto (t_1, y_1), obtenemos una solución v definida sobre un intervalo $[a_1, b_1]$, con $a_1 < t_1 < b_1$, tal que $v(t_1) = y_1$. Como $u(t_1) = v(t_1)$, la parte correspondiente a la unicidad del Teorema (2.4.1) implica que $u(t) = v(t)$ para $a_2 \leq t \leq b$, donde $a_2 = \max\{a, a_1\}$. Definimos, entonces, una función w sobre el intervalo $[a, b_1]$ poniendo, $w(t) = u(t)$ para $a \leq t \leq b$ y $w(t) = v(t)$ para $b \leq t \leq b_1$. Entonces v es una continuación de u a la *derecha*. Aplicando el mismo procedimiento al punto $(a, u(a))$ podemos mostrar que u tiene también continuación a la *izquierda*. De esta forma si el intervalo de definición de una solución contiene el extremo derecho o el izquierdo, la solución no es máxima. El intervalo de definición de una solución máxima es siempre un intervalo abierto.

El siguiente teorema, que es una simple extensión del Teorema (2.4.1), también recibe el nombre de *teorema fundamental de existencia y unicidad.*

Teorema 2.4.2 *Suponga que f y $\partial f/\partial y$ están definidas y son continuas sobre un conjunto abierto D del plano (t, y). Sea (t_0, y_0) un punto de D. Entonces la ecuación $dy/dt = f(t, y)$ tiene una solución máxima u tal que $u(t_0) = y_0$. Si v es cualquier otra solución que verifica $v(t_0) = y_0$, entonces u es una continuación de v.*

Suponga que u es una solución máxima. ¿ Podemos asegurar que ella esté definida para todo t? Un primer requisito para tener esto es que f esté definida para todo t. Pero aún si D es todo el plano, algunas o todas las soluciones máxima pueden estar definidas sobre intervalos con extremos finitos. Por ejemplo consideremos la ecuación $dy/dt = y^2$. Entonces $f(t, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$, y ambas funciones son continuas en todas partes. A pesar de esto, la solución $u(t) = -1/t$, definida para $t < 0$ es máxima. Cualquier continuación tendría que estar definida y ser continua en $t = 0$ y coincidir con u para $t < 0$, lo que es claramente imposible. Este ejemplo muestra que el intervalo de definición de una solución máxima u puede tener un punto extremo finito si $u(t) \to \infty$ o $u(t) \to -\infty$ cuando t se aproxima a ese punto. El siguiente teorema nos dice que esta es la única posibilidad.

Teorema 2.4.3 *Suponga que f y $\partial f/\partial y$ están definidas y son continuas en todo el plano. Sea u solución máxima de $dy/dt = f(t, y)$. Si el intervalo de definición de u tiene un punto extremos finito α, entonces $\mid u(t) \mid \to \infty$ cuando $t \to \alpha$.*

2.5 Solución general y problema de valores iniciales

Cuando nos enfrentamos a una ecuación diferencial nuestro primer impulso podría ser tratar de encontrar todas sus soluciones. También idealmente nos gustaría escribir estas soluciones en término de funciones bien conocidas. Esto puede hacerse para muchas ecuaciones importantes. Por ejemplo en la subsección (2.1) se determinó que toda solución de

$$y' = f(t) \,, \quad (f \quad \text{continua}) \,, \tag{2.9}$$

es de la forma

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + c\,, \tag{2.10}$$

donde t_0 es algún punto del intervalo donde f está definida, y c es una constante. También mostramos que todas las soluciones de

$$y' = ky \tag{2.11}$$

son de la forma

$$\phi(t) = ce^{kt}\,, \tag{2.12}$$

donde c es una constante.

Diremos que una familia de funciones, que generalmente depende de un cierto número de constantes, es la **solución general** de una ecuación diferencial, si toda solución de dicha ecuación pertenece a la familia. De esta forma (2.10) y (2.12) son, respectivamente, las soluciones generales de (2.9) y (2.11).

Pero algunas veces, queremos encontrar soluciones particulares que cumplan ciertas características especiales. De ellas conviene destacar a las que son solución del problema de *valores iniciales*

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{2.13}$$

Observe que si $f(t, y)$ verifica las condiciones del Teorema 2.4.1, entonces el problema de valores iniciales 2.13 tiene una única solución máxima. En general nos referimos a esta solución, como la solución particular de la ecuación $y' = f(t, y)$ que verifica la condición $y(t_0) = y_0$ o como la curva solución que pasa por el punto (t_0, y_0).

Ejemplo 2.5.1 Encuentre la solución particular de la ecuación $y' = 2y$ que verifica $y(1) = 2$.

La solución general de nuestra ecuación es

$$y(t) = ce^{2t}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar nuestra solución particular resolvemos la ecuación

$$2 \ = \ y(1) \ = \ ce^2 \quad \Longrightarrow \quad c \ = \ 2e^{-2}\,.$$

Luego la solución buscada es

$$y(t) \ = \ 2e^{-2}e^{2t}\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

o bien

$$y(t) \ = \ 2e^{2(t-1)}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

2.6 Ecuaciones de variables separables

Para ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \tag{2.14}$$

es posible, en ciertos casos, encontrar fórmulas para las soluciones. La técnica que se usa es conocida como *separación de variables*, y una ecuación de la forma (2.14) es llamada una ecuación de *variables separables*. Observamos que los sistemas autónomos son ejemplos de estas ecuaciones.

Daremos una simplificada descripción de esta técnica, que nos permitirá desarrollar rigurosamente algunos ejemplos.

Supongamos que la ecuación diferencial (2.14) está definida en un conjunto $\Lambda = I \times J$, donde I y J son intervalos abiertos de la recta real, y que las funciones $g : I \to \mathbb{R}$ y $h : J \to \mathbb{R}$ son continuas.

Primero observamos que si para $y_0 \in J$ tenemos $h(y_0) = 0$, entonces la función constante $y(t) = y_0$, $t \in I$ es solución de nuestra ecuación diferencial.

Sea ahora J_0 un intervalo abierto contenido en J, tal que $h(y) \neq 0$ para todo $y \in J_0$ y que sea maximal con esta propiedad (es decir, si existe intervalo J_1 que contiene a J_0 tal que $h(y) \neq 0$ para todo $y \in J_1$, entonces $J_1 = J_0$). Para $(t, y) \in I \times J_0$, podemos escribir la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt\,,$$

y así las variables son *separadas* dejando solamente $y's$ a la izquierda y $t's$ a la derecha. Tomamos ahora integrales indefinidas a ambos lados, obteniendo

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + c\,,$$

donde c es una constante arbitraria. No es necesario poner una constante arbitraria al lado izquierdo, ya que esta constante puede ser combinada con la del lado derecho. Esta última ecuación puede ser escrita

$$H(y) = G(t) + c\,,$$

donde H y G son las integrales indefinidas de $1/h$ y g, respectivamente. Ahora resolvemos esta ecuación para y. Para cada c (posiblemente restringido a cierto rango), la función resultante nos dará una o más soluciones de la ecuación diferencial (2.14).

Ejemplo 2.6.1

$$\frac{dy}{dt} = 2ty^2\,. \tag{2.15}$$

La ecuación está definida en $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ y $h(y) = y^2$ se anula solo para $y = 0$. Luego ya tenemos la solución constante $y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}$.

Para $y \neq 0$ separamos variables

$$\frac{dy}{y^2} = 2t dt\,,$$

y tomamos integral indefinida a ambos lados:

$$-\frac{1}{y} = t^2 + c\,.$$

Resolviendo para y obtenemos

$$y = \frac{-1}{t^2 + c}\,. \tag{2.16}$$

Verifiquemos que para cada c, la función $\phi(t) = \frac{-1}{t^2+c}$ satisface (2.15). Diferenciando obtenemos $\phi'(t) = \frac{2t}{(t^2+c)^2}$, y como también $2t(\phi(t))^2 = \frac{2t}{(t^2+c)^2}$, tenemos $\phi'(t) = 2t(\phi(t))^2$ y la ecuación es satisfecha.

Ahora separamos estas funciones en soluciones, es decir, funciones definidas sobre intervalos. Para toda c positiva, la fórmula (2.16) nos da una función definida para todo t. Todas estas soluciones son negativas; sus gráficos son las curvas mostradas en la Figura 8. Para $c = 0$, obtenemos dos curvas, definidas respectivamente para $t < 0$ y $t > 0$; ambas son negativas. Para cada valor negativo de c obtenemos tres curvas. Una de estas es positiva y está definida para $-\sqrt{-c} < t < \sqrt{-c}$; las otras dos son negativas y están definidas para $t < -\sqrt{-c}$ y $t > \sqrt{-c}$, respectivamente. Note que todas las soluciones obtenidas son maximales.

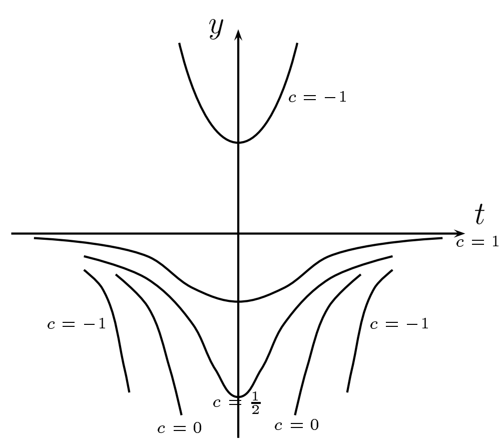

Figura 8

¿ Como podemos asegurarnos que no hay otras soluciones maximales ? Esto se responde usando el teorema de existencia y unicidad (Teorema (2.4.1)). Como $f(t, y)$, que es igual a $2ty^2$, y $\partial f(t, y)/\partial y$, que es igual a $4ty$, son continuas en todo el plano, una y solo una curva solución pasa a través de cualquier punto dado (t_0, y_0). Si nos damos cuenta que hay un punto que no está en ninguna de las curvas solución que hemos encontrado, entonces claramente nuestra familia de curvas solución es incompleta. Por otra parte, si por cada punto (t_0, y_0) podemos encontrar en nuestra familia una solución u que verifica $u(t_0) = y_0$, entonces nuestra familia es completa. La primera afirmación es consecuencia de la parte de la *existencia* del teorema: por todo punto (t_0, y_0), existe una solución u tal que $u(t_0) = y_0$. La segunda afirmacón es consecuencia de la parte de la *unicidad*: no puede haber más de una curva solución a través de cualquier punto; si nuestras soluciones cubren todo el plano, no hay otras.

El asunto se reduce a: dado un punto (t_0, y_0), ¿ hay un número c tal que $y_0 = \frac{-1}{t_0^2+c}$? Resolviendo esta ecuación obtenemos $c = -t_0^2 - 1/y_0$, si $y_0 \neq 0$. ¿ Que pasa si $y_0 = 0$? En este caso, la solución es la función constante $y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}$. Luego, la familia

$$\begin{cases} y(t) &= \frac{-1}{t^2+c}\,, c \in \mathbb{R} \\ y(t) &= 0 \end{cases}$$

con t en el intervalo que corresponde según c, es la solución general de nuestra ecuación.

Ejemplo 2.6.2

$$\frac{dy}{dt} = y\,. \tag{2.17}$$

Esta ecuación tiene la solución constante $y \equiv 0$. Para $y \neq 0$, la ecuación se escribe

$$\frac{dy}{y} = dt\,.$$

Si $y > 0$ integrando obtenemos

$$\ln(y) = t + c\,.$$

Para despejar y, tomamos exponencial a ambos lados:

$$y = e^{t+c} = e^c e^t = ke^t\,,$$

donde k es una constante positiva arbitraria.
Si $y < 0$ la ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{-dy}{-y} = dt\,,$$

e integrando se obtiene

$$\ln(-y) = t + c \quad \Longrightarrow \quad -y = e^{t+c} = e^c e^t = ke^t\,,$$

y luego

$$y = -ke^t\,,$$

donde k es una constante positiva arbitraria. Así

$$y = \pm k e^t \,,$$

dependiendo de si $y > 0$ o $y < 0$. Esta fórmula es equivalente a

$$y = c e^t \,, \tag{2.18}$$

donde c es una constante no nula arbitraria.

Diferenciando (2.18) se obtiene $dy/dt = ce^t = y$, luego (2.17) se verifica. También notamos que $c = 0$ produce la solución constante, por lo que (2.18) es solución para todos los valores de c. Todas estas soluciones están definidas para todo t. Finalmente, observamos que $y_0 = ce^{t_0}$ tiene la solución $c = y_0 e^{-t_0}$, por lo que las curvas (2.18) cubren todo el plano. Como (2.17) tiene la propiedad de la *unicidad*, hemos encontrado todas las soluciones. Algunas curvas solución son mostradas en la Figura 9.

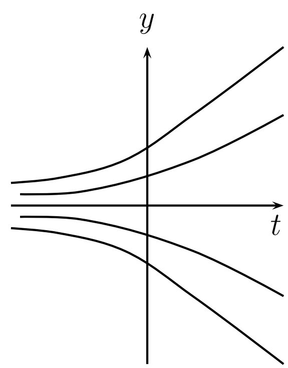

Figura 9

Ejemplo 2.6.3

$$\frac{dy}{dt} = \cos^2(y) \,. \tag{2.19}$$

Las soluciones de $\cos^2(y) = 0$ nos dan una cantidad infinita de soluciones constantes de la ecuación diferencial. Estas son $y \equiv (n + \frac{1}{2})\pi$, donde n es un número entero arbitrario. Si $\cos^2(y) \neq 0$, podemos escribir

$$\frac{dy}{\cos^2(y)} = dt \,.$$

Como $1/\cos^2(y) = \sec^2(y)$ y $\int \sec^2(y) dy = \tan(y)$, tenemos, después de integrar

$$\tan(y) = t + c \,. \tag{2.20}$$

Para resolver esta ecuación para y, podemos simplemente poner $y = \arctan(t + c)$. Si hacemos esto, tendríamos que asumir que y está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$; y todas las soluciones de (2.19) obtenidas de esta forma estarían en esta franja. En lugar de esto, debemos asumir que y está en alguno de los infinitos intervalos abiertos cuyos extremos son ceros consecutivos de $\cos^2(y)$. Supongamos, entonces, que $-\pi/2 + n\pi < y < \pi/2 + n\pi$ para algún entero n, y así, $-\pi/2 < y - n\pi < \pi/2$. Como $\tan(y) = \tan(y - n\pi)$, podemos escribir (2.20) de la forma

$$\tan(y - n\pi) = t + c$$

y aplicando tangente inversa a ambos lados obtenemos

$$y = n\pi + \arctan(t + c)\,. \tag{2.21}$$

En esta fórmula c es arbitraria, y n es un entero arbitrario. Dejamos al lector verificar que las funciones definidas por esta fórmula son realmente soluciones, y que junto con las soluciones constantes cubren el plano. Como (2.19) tiene la propiedad de la unicidad, tenemos que todas las soluciones han sido encontradas. Note que cada una de ellas está definida para todo t.

Ejemplo 2.6.4

$$\frac{dy}{dt} = 2t\sec(y)\,, \quad -\pi/2 < y < \pi/2\,. \tag{2.22}$$

Como la secante no tiene ceros, no hay soluciones constantes. Separando variables e integrando obtenemos

$$\operatorname{sen}(y) = t^2 + c\,. \tag{2.23}$$

En los ejemplos anteriores, la constante de integración era completamente arbitraria. Aquí, sin embargo, no tiene sentido permitir que c asuma el valor 2, por ejemplo. Si lo hacemos no podríamos resolver la ecuación para y, sin importar como restrinjamos los valores de t. El lado derecho nunca sería menor que 2, mientras que $\operatorname{sen}(y)$ no puede exceder de 1. Por lo tanto debemos solamente permitir valores de c para los cuales la ecuación (2.23) sea satisfecha a lo menos por un par de valores (t, y). Este requerimiento junto con las restricciones $-\pi/2 < y < \pi/2$ implican que $c < 1$. Elegido $c < 1$, debemos restringir t para tener $-1 < t^2 + c < 1$, es decir $-1 - t^2 < c < 1 - t^2$. En la Figura 10 se grafica la región del plano (t, c) que satisface esta desigualdad.

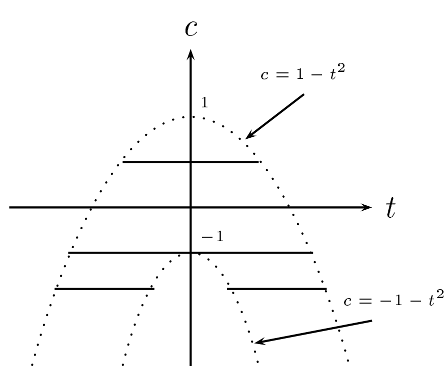

Figura 10

Si $-1 \leq c < 1$ se cumple que la región intersecta a $c =$ constante en un solo intervalo $I_c =]-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}\,[$. Si ocurre que $c < -1$ se cumple que la región intersecta a $c =$ constante en dos intervalos $I_c^1 =]-\sqrt{1-c}, -\sqrt{-1-c}\,[$ y $I_c^2 =]\sqrt{-1-c}, \sqrt{1-c}\,[$. Ahora ya podemos resolver y obtener la fórmula

$$y = \arcsin(t^2 + c)\,. \tag{2.24}$$

Hay una curva solución de (2.22) si $-1 \le c < 1$, y dos curvas solución si $c \le -1$.

2.6.1 Ecuaciones que se reducen a ecuaciones de variables separables

1. Ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f(ax + by + c)$$

se reducen a variables separables haciendo el cambio de variables $z \;=\; ax + by + c$. En efecto

$$z \;=\; ax + by + c \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} \;=\; a + b\frac{dy}{dx}\,,$$

y reemplazando en nuestra ecuación se obtiene

$$\frac{dz}{dx} \;=\; a + bf(z)$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.5 Aplicando lo anterior resolvamos

$$\frac{dy}{dx} \;=\; 3y \;-\; x\;.$$

El cambio de variables $z \;=\; 3y \;-\; x$, implica $\frac{dz}{dx} \;=\; 3\frac{dy}{dx} \;-\; 1$. Luego, en las nuevas variables nuestra ecuación es

$$\frac{dz}{dx} \;=\; 3z \;-\; 1\;.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dz}{3z - 1} \;=\; dx\;,$$

e integrando

$$\frac{1}{3}\ln(3z - 1) \;=\; x \;+\; \ln(c)\;.$$

Luego

$$3z - 1 \;=\; ce^{3x} \quad \Longrightarrow \quad z(x) \;=\; ce^{3x} + \frac{1}{3}\,,$$

y volviendo a nuestras variables originales, tenemos

$$3y - x \;=\; ce^{3x} + \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad y(x) \;=\; \frac{x}{3} \;+\; ce^{3x} \;+\; \frac{1}{9}\,.$$

2. Ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reducen a variables separables haciendo el cambio de variables $z \;=\frac{y}{x}$.
En efecto

$$z \;=\; \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} \;=\; \frac{\frac{dy}{dx}x - y}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} \;=\; \frac{f(z) - z}{x}\,,$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.6 Resolvamos

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{x+y}{x-y}\,.$$

Esta ecuación la podemos escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\,.$$

Por otra parte $z \;=\; \frac{y}{x}$, implica $y = zx$, y por lo tanto $\frac{dy}{dx} \;=\; x\frac{dz}{dx} + z$. Luego tenemos

$$x\frac{dz}{dx} + z \;=\; \frac{1+z}{1-z} \quad \Longrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1+z^2}{1-z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-z}{1+z^2}dz \;=\; \frac{dx}{dx}\,.$$

Integrando obtenemos

$$\arctan(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) - \ln(x) \;=\; c\,,$$

y volviendo a nuestra variables originales

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \;-\; \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \;=\; c\,.$$

Observe que nuestra solución general está dada en forma implícita. Así, una función $y = y(x)$ definida sobre un intervalo I es solución solo si al ser reemplazada en el lado izquierdo de la expresión anterior resulta constante, para todo x en I.

3. Ecuaciones del tipo

$$M(x,y)\,dx \;+\; N(x,y)\,dy \;=\; 0\,,$$

donde M, N son funciones homogéneas de grado n.

Recuerde que una función $F(x,y)$ se dice *homogénea de grado* n si

$$F(tx,ty) \;=\; t^n\,F(x,y)\,,$$

para todo x,y,t tales que los puntos (x,y) y (tx,ty) están en el dominio de definición de F.
La ecuación es de la forma

$$\frac{dy}{dx} \;=\; F(x,y)\,,$$

donde $F(x,y) \;=\; -M(x,y)/N(x,y)$ es claramente homogénea de grado 0. Entonces

$$F(x,y) \;=\; F\left(x, x\frac{y}{x}\right) \;=\; x^0\,F\left(1, \frac{y}{x}\right) \;=\; F\left(1, \frac{y}{x}\right)\,.$$

De esta forma nuestra ecuación es del tipo anterior

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f\left(\frac{y}{x}\right)\,,$$

con $f\left(\frac{y}{x}\right) \;=\; F\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Ejemplo 2.6.7 Considere la ecuación

$$(x^2 - 2y^2)\,dx \;+\; xy\,dy \;=\; 0\,\cdot$$

La ecuación se escribe

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{x^2-2y^2}{xy} \;=\; -\frac{1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}\,,$$

y poniendo $z = \frac{y}{x}$ tenemos

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} \;-\; \frac{1}{x}\,\frac{y}{x} \;=\; -\frac{1}{x}\left(\frac{1-2z^2}{z} \;+\; z\right) \;=\; -\frac{1}{x}\,\frac{1-z^2}{z}\,\cdot$$

Separando variables y multiplicando por 2 obtenemos

$$\frac{2z}{z^2-1}\,dz \;=\; \frac{2}{x}\,dx\,,$$

integrando

$$\ln(z^2-1) \;=\; 2\,\ln(x) \;+\; \ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$z^2 \;=\; 1 \;+\; c\,x^2\,.$$

Finalmente volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general

$$y \;=\; \pm\,x\,\sqrt{1 \;+\; c\,x^2}\,.$$

4. Ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{ex+fy+g}\right).$$

Si el determinante del sistema

$$\begin{cases} ax+by+c &= 0 \\ ex+fy+g &= 0 \end{cases}$$

es no nulo, es decir si $af - be \neq 0$, el sistema tiene una única solución, digamos $x = h, y = k$. Entonces si hacemos el cambio de coordenadas $X = x - h, Y = y - k$, tenemos $dX = dx, dY = dy$, y

$$\frac{aX+bY}{eX+fY} = \frac{ax+by+c}{ex+fy+g}.$$

Luego en las nuevas coordenadas tenemos la ecuación homogénea

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{aX+bY}{eX+fY}\right),$$

que es del tipo 2.
Si $af - be = 0$, existe k tal que $ex+fy = k\,(ax+by)$. Ponemos entonces $z = ax+by$ y la ecuación queda de la forma

$$\frac{dz}{dx} = a + bF\left(\frac{z+c}{kz+g}\right),$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.8 Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+2}{x+y-2}.$$

Resolvemos primero el sistema

$$\begin{cases} x-y+2 &= 0 \\ x+y-2 &= 0\,, \end{cases}$$

cuya solución es $x = 0, y = 2$. Hacemos entonces el cambio de coordenadas $X = x, Y = y - 2$ y obtenemos la ecuación

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}.$$

Para transformarla en una ecuación de variables separables, ponemos como antes $Z = \frac{Y}{X}$, y obtenemos la ecuación

$$X\frac{dZ}{dX} + Z \;=\; \frac{1-Z}{1+Z}\,.$$

Por lo tanto

$$X\frac{dZ}{dX} \;=\; \frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}\,,$$

y separando variables

$$\frac{1+Z}{1-2Z-Z^2}dZ \;=\; \frac{dX}{X}\,.$$

Integrando

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2Z-Z^2) \;=\; \ln(X)+\ln(c) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{1-2Z-Z^2} \;=\; \frac{c}{X}\,,$$

y elevando al cuadrado

$$1-2Z-Z^2 \;=\; \frac{c}{X^2}\,\cdot$$

Volviendo a las variables X, Y, obtenemos

$$1-2\frac{Y}{X}-\frac{Y^2}{X^2} \;=\; \frac{c}{X^2} \quad\Longrightarrow\quad X^2-2XY-Y^2 \;=\; c\,,$$

y en las coordenadas x, y, la solución general (en forma implícita)

$$x^2-2x(y-2)-(y-2)^2 \;=\; c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

2.7 Ecuaciones Diferenciales Exactas y Factor Integrante

Consideremos ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy \;=\; 0\,. \tag{2.25}$$

Definición 2.7.1 *Diremos que la ecuación (2.25) es una* **ecuación diferencial exacta** *en D, si existe una función $u(x,y)$ tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; N(x,y) \quad \forall (x,y)\in D\,.$$

En tal caso

$$du \;=\; \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \;=\; M(x,y)dx+N(x,y)dy \;=\; 0\,,$$

y (2.25) es equivalente a

$$du \;=\; 0\,.$$

Luego

$$y = y(x)\,, \quad x \in I \quad \text{es solución de (2.25)} \quad \Longleftrightarrow \quad u(x, y(x)) = c\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Proposición 2.7.2 *Sean M, N funciones con derivadas parciales continuas de primer orden en una bola abierta $B \subset \mathbb{R}^2$. Entonces*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0 \quad \textit{es exacta en } B \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \;\equiv\; \frac{\partial N}{\partial x} \quad \textit{en } B\,.$$

Demostración. *Suficiencia.* Supongamos existe u tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ en B. Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Necesidad. Sabemos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en B. Debemos encontrar u tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ en B.
Fijemos un punto (x_0, y_0) en B. Para tener $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ definimos para $(x,y) \in B$

$$u(x,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds \;+\; g(y)\,,$$

con $g(y)$ a determinar, para que se cumpla también $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.
Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;&=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,y)ds \;+\; g'(y) \\ &=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(s,y)ds \;+\; g'(y) \\ &=\; N(x,y) \;-\; N(x_0,y) \;+\; g'(y)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos tener

$$\begin{aligned} g'(y) \;&=\; N(x_0,y) \\ \Longrightarrow \quad g(y) \;&=\; \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt\,, \end{aligned}$$

y nuestra función buscada es

$$u(x,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds \;+\; \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt\,.$$

Ejemplo 2.7.3 Resolvamos

$$(3x^2 \;+\; 6xy^2)dx \;+\; (6x^2y \;+\; 4y^3)dy \;=\; 0\,.$$

Tenemos $M(x,y) = 3x^2 \,+\, 6xy^2$ y $N(x,y) = 6x^2y \,+\, 4y^3$. Por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \;=\; 12xy \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y la ecuación es exacta.
Pongamos

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int (3x^2 \,+\, 6xy^2)dx \,+\, g(y) \\ &= x^3 \,+\, 3x^2y^2 \,+\, g(y)\,. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 6x^2y \,+\, g'(y)\,, \quad \text{y como} \\ N(x,y) &= 6x^2y \,+\, 4y^3\,, \quad \text{debemos tener} \\ g'(y) &= 4y^3 \\ \Longrightarrow \quad g(y) &= y^4\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \;=\; x^3 \,+\, 3x^2y^2 \,+\, y^4\,.$$

Así, las curvas soluciones $(x, y(x))$ de la ecuación satisfacen

$$x^3 \,+\, 3x^2y^2 \,+\, y^4 \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Definición 2.7.4 *Si la ecuación*

$$M(x,y)dx \,+\, N(x,y)dy \;=\; 0$$

no es exacta en D, se llama **factor integrante** *a toda función $\mu = \mu(x,y)$ definida en D tal que*

$$\mu(x,y)M(x,y) \,+\, \mu(x,y)N(x,y)dy \;=\; 0$$

es una ecuación exacta en D.

Observaciones 2.7.5 Es claro que toda solución de $y = y(x)$, $x \in I$, de $\mu M dx + \mu N dx = 0$, que verifica: $\mu(x, y(x))$ está definida y $\mu(x,y(x)) \neq 0$ para todo $x \in I$, es también solución de $Mdx + Ndy = 0$ en I.

Ejemplo 2.7.6 La ecuación

$$y(1 \,+\, xy)dx \,-\, xdy \;=\; 0 \tag{2.26}$$

no es exacta.

Sin embargo para $y \neq 0$ la ecuación multiplicada por $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$

$$\frac{y(1\;+\;xy)}{y^2}dx \;-\; \frac{x}{y^2}dy \;=\; 0\,,$$

es decir

$$(\frac{1}{y} \;+\; x)dx \;-\; \frac{x}{y^2}dy \;=\; 0\,, \tag{2.27}$$

es exacta.
Así $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$ es factor integrante de (2.26) en el conjunto $D = \{(x,y)/y \neq 0\}$.

Para resolver (2.27) ponemos

$$u(x,y) \;=\; \int \left(\frac{1}{y} \;+\; x\right) dx \;+\; g(y) \;=\; \frac{x}{y} \;+\; \frac{x^2}{2} \;+\; g(y)\,.$$

Pero como

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; -\frac{x}{y^2} \;+\; g'(y)\,,$$

debemos tener

$$g'(y) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad g(y) = c\,.$$

Por lo tanto, toda solución $y = y(x)$ de (2.27) verifica la ecuación implícita

$$\frac{x}{y} \;+\; \frac{x^2}{2} \;=\; c\,, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}\,.$$

Despejando y obtenemos

$$y(x) \;=\; \frac{2x}{2c \;-\; x^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}, \text{para } x \text{ tal que } 2c \;-\; x^2 \neq 0\,.$$

Observación 2.7.7 Para que $\mu = \mu(x,y)$ sea factor integrante de $Mdx + Ndy = 0$, debemos tener

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mu}{\partial y} M \;+\; \mu\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; \frac{\partial \mu}{\partial x} N \;+\; \mu\frac{\partial N}{\partial x} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} N \;-\; \frac{\partial \mu}{\partial y} M\right) \;=\; \frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial x} N \;-\; \frac{\partial(\ln(\mu)}{\partial y} M \;=\; \frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}\,.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

La ecuación (2.28) es una E.D.P. conocida como la **ecuación del factor integrante**. Se puede demostrar que esta ecuación, bajo condiciones bastante generales, siempre tiene solución. El problema es encontrar sus soluciones.

2.7.1 Casos en que es fácil encontrar el factor integrante

1) Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; f(x) \quad \text{(depende sólo de } x) \,,$$

entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de x. En efecto si $\mu=\mu(x)$ la ecuación (2.28) queda de la forma

$$\frac{\partial(\ln(\mu(x)))}{\partial x} \;=\; \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; f(x)\,,$$

lo que implica

$$\ln(\mu(x))=\int_{x_0}^{x} f(s)ds \qquad \text{o bien} \qquad \mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\,.$$

2) Si

$$\frac{-1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; g(y) \quad \text{(depende sólo de y)} \,,$$

entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de y. En efecto si $\mu=\mu(y)$ la ecuación (2.28) queda de la forma

$$\frac{\partial(\ln(\mu(y)))}{\partial x} \;=\; \frac{-1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; g(y)\,,$$

lo que implica

$$\mu(y) \;=\; e^{\int_{y_0}^{y} g(t)dt}\,.$$

Ejemplo 2.7.8 Resolvamos

$$\left(2xy \;+\; x^2y \;+\; \frac{y^3}{3}\right)dx \;+\; (x^2 \;+\; y^2)dy \;=\; 0\,.$$

Poniendo

$$M(x,y) \;=\; 2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\,, \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; x^2+y^2\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 2x+x^2+y^2\,, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \;=\; 2x\,,$$

y la ecuación no es exacta.
Pero

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2) \;=\; 1\,.$$

Por lo tanto, el factor integrante es

$$\mu(x) \;=\; e^{\int dx} \;=\; e^{x}\,.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$e^{x}\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx \;+\; e^{x}(x^2+y^2)dy \;=\; 0\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
u(x,y) \;&=\; \int e^{x}\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx \;+\; g(y)\\
&=\; 2y\int xe^{x}dx \;+\; y\int x^2e^{x}dx) \;+\; \frac{y^3}{3}e^{x} \;+\; g(y)\\
&=\; 2y(xe^{x}-e^{x}) \;+\; y\left(x^2e^{x} - 2\int xe^{x}dx\right) \;+\; \frac{y^3}{3}e^{x} \;+\; g(y)\\
&=\; yx^2e^{x} \;+\; \frac{y^3}{3}e^{x} \;+\; g(y)\,.
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;-\; N(x,y) \;=\; x^2e^{x} + y^2e^{x} + g'(y) \;-\; e^{x}(x^2+y^2) \;=\; g'(y)\,.$$

Por lo tanto

$$g'(y) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad g(y) \;=\; 0\,.$$

Así

$$u(x,y) \;=\; ye^{x}\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)\,,$$

y la solución general es

$$ye^{x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = c\;,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 2.7.9 Resolvamos

$$\frac{y}{x}dx \;+\; (y^3 - \ln(x))dy \;=\; 0\,.$$

Poniendo

$$M(x,y) \;=\; \frac{y}{x}\,,\quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; y^3 - \ln(x)\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; \frac{1}{x}\,,\quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \;=\; \frac{-1}{x}\,,$$

y la ecuación no es exacta.
Pero

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; -\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} \;=\; -\frac{2}{y}\,,$$

implica que el factor integrante es

$$\mu(y) \;=\; e^{-2\int \frac{1}{y}dy} \;=\; e^{-2\ln(y)} \;=\; e^{\ln(\frac{1}{y^2})} \;=\; \frac{1}{y^2}\,\cdot$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$\frac{1}{xy}dx \;+\; \left(y - \frac{\ln(x)}{y^2}\right) dy \;=\; 0\,.$$

Luego

$$u(x,y) \;=\; \int \frac{1}{xy}dx \;+\; g(y) \;=\; \frac{1}{y}\ln(x) \;+\; g(y)\,.$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;-\; N(x,y) \;=\; -\frac{\ln(x)}{y^2} + g'(y) - y + \frac{\ln(x)}{y^2} \;=\; g'(y) - y\,,$$

lo que implica

$$g'(y) \;=\; y \quad\Longrightarrow\quad g(y) \;=\; \frac{y^2}{2}\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2}\,,$$

y la solución general satisface la ecuación implícita

$$\frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2} \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

2.8 Ecuaciones Lineales

Consideremos la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)\,, \tag{2.29}$$

y supongamos que la funciones $a(t)$ y $b(t)$ están definidas y son continuas sobre un intervalo abierto I. Consecuentemente la función $f(t,y) = a(t)y + b(t)$ y $(\partial f/\partial y)(t,y) = a(t)$ son continuas y luego nuestra ecuación tiene la propiedad de la unicidad.

Mostraremos en esta sección que las soluciones de (2.29) pueden ser expresadas por medio de una fórmula en la que aparecen integrales. Esta fórmula debida a Leibniz, puede ser derivada de varias formas. Presentaremos primero un método de resolución que aunque no es el más corto, tiene la ventaja que la idea básica puede ser aplicada a ecuaciones lineales de orden superior y a sistemas lineales.

La ecuación (2.29) se dice **homogénea** si $b(t)$ es idénticamente cero sobre I, y **no-homogénea** si existe $t \in I$ tal que $b(t) \neq 0$. La ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \tag{2.30}$$

se resuelve usando separación de variables. Las soluciones están dadas por

$$y(t) = ce^{\int a(t)dt} \tag{2.31}$$

y están por lo tanto definidas sobre todo el intervalo I.

Para discutir la ecuación no-homogénea, consideramos simultáneamente con ella la ecuación homogénea obtenida suprimiendo el término b. La ecuación homogénea obtenida de esta forma es llamada *ecuación reducida*; la ecuación no-homogénea misma es referida como la *ecuación completa*. Sea $u(t)$ cualquier solución de la ecuación reducida que no sea la solución cero. Intentaremos encontrar una función $v(t)$ tal que $v(t)u(t)$ sea solución de la ecuación completa. Asumiendo que tal v existe, sustituyendo y por vu en (2.29), se obtiene

$$(v(t)u(t))' = a(t)v(t)u(t) + b(t)\,,$$

o

$$v'(t)u(t) + v(t)u'(t) = a(t)v(t)u(t) + b(t)\,.$$

Como $u'(t) = a(t)u(t)$, la última ecuación se reduce a

$$v'(t)u(t) + a(t)u(t)v(t) = a(t)v(t)u(t) + b(t)\,,$$

o

$$v'(t)u(t) = b(t)\,.$$

Como $u(t)$ es no nula,

$$v'(t) = \frac{b(t)}{u(t)}$$

y por lo tanto

$$v(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c\,.$$

De esta forma obtenemos la fórmula

$$y(t) = u(t)(\int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c)\,. \tag{2.32}$$

Es muy fácil verificar que esta fórmula nos dá una solución de (2.29) para todo c:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= u'(t)(\int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c) + u(t)\frac{b(t)}{u(t)} \\ &= a(t)(u(t)(\int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c) + b(t) \\ &= a(t)y(t) + b(t)\,.\end{aligned}$$

Hemos obtenido así una cantidad infinita de soluciones de (2.29). Mostraremos que en realidad las hemos encontrado todas. Para chequear esto denotemos la integral $\int \frac{b(t)}{u(t)}$ por $Q(t)$, y así la fórmula queda $y(t) = u(t)(Q(t) + c)$. Poniendo $t = t_0, y = y_0$, obtenemos $c = \frac{y_0}{u(t_0)} - Q(t_0)$, y por lo tanto podemos realizar cualquier condición inicial. Note que todas las soluciones están definidas sobre todo el intervalo I.

Para completar la derivación de la fórmula prometida, reemplazamos la función $u(t)$ en (2.32) por $e^{\int a(t)dt}$. Establecemos el resultado como un teorema:

Teorema 2.8.1 *(Fórmula de Leibniz) Las soluciones de (2.29) estań dadas por*

$$y(t) = e^{\int a(t)dt}(\int e^{-\int a(t)dt}b(t)dt + c)\,, \tag{2.33}$$

donde t está en I y c es una constante arbitraria.

La integral indefinida $\int a(t)dt$, que aparece dos veces en (2.33), puede ser elegida como queramos, pero debe ser la misma en ambos lugares.

El lector puede fácilmente verificar que la solución de (2.29) que satisface $u(t_0) = y_0$ está dada por:

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}[\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds + y_0]\,. \tag{2.34}$$

Ejemplo 2.8.2

$$\frac{dy}{dt} = 2y + e^t\,.$$

Aquí $a(t) \equiv 2$ y $b(t) = e^t$. Sustituyendo en (2.33):

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{\int 2dt}(\int e^{-\int 2dt}e^t dt + c) \\ &= e^{2t}(\int e^{-2t}e^t dt + c) \\ &= e^{2t}(\int e^{-t}dt + c) \\ &= ce^{2t} - e^t\,.\end{aligned}$$

El método con que fué derivado (2.32) es conocido como *variación de parámetros.* En efecto, una solución de la ecuación completa se obtiene permitiendo que el parámetro c en la fórmula $y(t) = cu(t)$ para la solución de la ecuación reducida *varíe*, es decir, sea una función v de t.

Otro método de resolución consiste en escribir (2.29) de la forma

$$(a(t)y + b(t))dt \;-\; dy \;=\; 0 \tag{2.35}$$

y darnos cuenta que admite factor integrante que depende solo de la variable t. Luego aplicando los métodos de la sección anterior encontramos las soluciones.

En efecto, si

$$M(t,y) \;=\; a(t)y + b(t)\,, \quad \text{y} \quad N(t,y) \;=\; -1\,,$$

tenemos

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)(t,y) \;=\; -a(t)\,,$$

y luego tenemos factor integrante

$$\mu(t) \;=\; e^{-\int a(t)dt}\,.$$

La ecuación (2.35) multiplicada por $\mu(t)$ es

$$e^{-\int a(t)dt}(a(t)y + b(t))dt \;-\; e^{-\int a(t)dt}dy \;=\; 0\,. \tag{2.36}$$

De esta forma

$$u(t,y) \;=\; -\int e^{-\int a(t)dt}dy + h(t) \;=\; -ye^{-\int a(t)dt} + h(t)\,,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \;=\; ya(t)e^{-\int a(t)dt} + h'(t)\,.$$

Comparando con (2.36), obtenemos

$$h'(t) \;=\; b(t)e^{-\int a(t)dt} \quad \Longrightarrow \quad h(t) \;=\; \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\,,$$

y por lo tanto

$$u(t,y) \;=\; -ye^{-\int a(t)dt} + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\,.$$

De esta forma $y = y(t)$ es solución de (2.29) en el intervalo I, si existe constante c tal que

$$ye^{-\int a(t)dt} - \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt = c\,, \quad \forall t \in I\,.$$

Despejando y obtenemos nuevamente la fórmula de Leibniz

$$y(t) \;=\; e^{\int a(t)dt}\left(c \;+\; \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)\,.$$

Ejemplo 2.8.3 Usando este último método encontremos las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = y\tan(x) + \cos(x)\,.$$

Escribiendo la ecuación de la forma

$$(y\tan(x) + \cos(x))dx - dy = 0\,,$$

tenemos $a(x) = \tan(x)$, y el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-\int \tan(x)dx} = e^{\int \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}dx} = e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)\,.$$

Multiplicando por el factor integrante nos queda la ecuación

$$(y\mathrm{sen}(x) + \cos^2(x))dx - \cos(x)dy = 0\,,$$

y luego

$$u(x,y) = -\int \cos(x)dy + h(x) = -y\cos(x) + h(x)\,.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y\mathrm{sen}(x) + h'(x)\,,$$

debemos tener

$$\begin{aligned} h'(x) = \cos^2(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x) &= \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)\,. \end{aligned}$$

Luego

$$u(x,y) = -y\cos(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)\,,$$

y las soluciones $y = y(x)$ deben verificar

$$-y\cos(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) = c\,,$$

lo que implica

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) + c\right]\,.$$

2.9 Ecuaciones que se reducen al caso lineal

2.9.1 Ecuación de Bernoulli

Son ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y \;=\; f(x)y^n\,, \quad \text{con} \quad n \neq 1\,.$$

Multiplicando por y^{-n} obtenemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} \;=\; f(x)\,.$$

Haciendo el cambio de variables $z = y^{1-n}$, tenemos

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)[\,-p(x)z \;+\; f(x)]\,,$$

es decir

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z \;=\; (1-n)f(x)\,,$$

que es lineal.

Ejemplo 2.9.1 Resolvamos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}\,.$$

Tenemos $n = \frac{1}{2}$ y multiplicando por $y^{-\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$y^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{4}{x}\sqrt{y} \;+\; x\,.$$

Ponemos entonces $z = \sqrt{y}$ y reemplazando se tiene

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{1}{2}\,[\frac{4}{x}\,z \;+\; x]\,,$$

y nos queda la ecuación

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z \;=\; \frac{1}{2}x\,.$$

La correspondiente ecuación homogénea es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z\,, \quad \text{o} \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}\,,$$

e integrando se obtiene

$$\ln(z) = 2\ln(x) + \ln(c) \quad \Longrightarrow \quad z = cx^2\,.$$

Haciendo variar la constante y reemplazando en la ecuación completa se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= c'(x)x^2 + c(x)2x \;=\; \frac{2}{x}z + \frac{1}{2}x \\ \Longrightarrow \quad c'(x) &= \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{x^2} \;=\; \frac{1}{2x} \\ \Longrightarrow \quad c(x) &= \frac{1}{2}\ln(x) + c\,. \end{aligned}$$

Luego

$$z(x) = (\frac{1}{2}\ln(x) + c)x^2$$

lo que implica

$$y(x) = [z(x)]^2 = (\frac{1}{2}\ln(x) + c)^2 x^4\,.$$

2.9.2 Ecuación de Riccati

Es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)\,.$$

Esta se resuelve si uno conoce una solución particular, digamos $y_1(x)$. Para ello ponemos $y(x) = z(x) + y_1(x)$ y reemplazando se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y - q(x)y^2 + f(x) = \frac{dz}{dx}(x) + \frac{dy_1}{dx}(x)$$

es decir,

$$-p(x)y - q(x)y^2 + f(x) = \frac{dz}{dx} - p(x)y_1(x) - q(x)y_1(x)^2 + f(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = p(x)(y_1 - y) + q(x)(y_1^2 - y^2)$$

es decir,

$$\frac{dz}{dx} = -p(x)z - q(x)(z^2 + 2zy_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = -(p(x) + q(x)y_1(x))z - q(x)z^2$$

que es de Bernoulli con $n = 2$.

Ejemplo 2.9.2 Resolvamos

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}\,.$$

Claramente la función $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es solución particular. Poniendo $y(x) = z(x) + \frac{1}{x}$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = z^2 + \frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = z^2 .$$

Para resolver esta ecuación de Bernoulli multiplicamos por z^{-2}

$$z^{-2}\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z^{-1} = 1 ,$$

y hacemos el cambio de variables $w = z^{-1}$, que implica $\frac{dw}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$, obteniendo

$$-\frac{dw}{dx} - \frac{2}{x}w = 1 .$$

Tenemos así la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2}{x}w - 1$$

cuya solución general es

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int -e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\int -x^2 dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{-x^3}{3} + c\right) \\ &= \frac{-x^3 + 3c}{3x^2} . \end{aligned}$$

Luego

$$z(x) = w(x)^{-1} = \frac{3x^2}{c - x^3} ,$$

y la solución general de la ecuación inicial es

$$y(x) = \frac{3x^2}{c - x^3} + \frac{1}{x} .$$

Observación 2.9.3 Conocida una solución particular $y_1(x)$ de una ecuación de Ricatti el cambio de coordenadas $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ nos lleva directamente a una ecuación lineal.