# Contenido

# Capítulo 12

# Ecuación de Laplace

## 12.1 Funciones armónicas

Las ecuaciones elípticas aparecen cuando se estudian procesos estacionarios, es decir, que no dependen del tiempo. Como sabemos, en el caso de ecuaciones lineales de segundo orden definidas en una región $\Lambda$ del plano $x, y$ son de la forma

$$\Delta u \;=\; A_4(x,y)\,u_x \;+\; A_5(x,y)\,u_y \;+\; g(x,y)\,,$$

donde

$$\Delta u \;=\; u_{xx} \;+\; u_{yy}\,,$$

es el **operador Laplaciano** aplicado a $u$.

Las más frecuentes son:

$$\begin{array}{rclll} \Delta u & = & 0 & & \text{ecuación de Laplace}\,, \\ \Delta u & = & A(x,y) & & \text{ecuación de Poisson}\,. \end{array}$$

Consideraremos sólo problemas definidos en un cierto dominio $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ con ciertas condiciones de contorno dadas sobre su frontera $\partial\Lambda$. Pueden ser de tres tipos:

i) Condiciones de Dirichlet: $u\big/_{\partial\Lambda} = f$.

ii) Condiciones de Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}\big/_{\partial\Lambda} = f$.
($\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada según la normal exterior a la frontera)

iii) Condiciones de Robin: $(u + h\,\frac{\partial u}{\partial n})\big/_{\partial\Lambda} = f\,, \text{con}\,, h \in \mathbb{R}$.

Nos restrigiremos básicamente a las del tipo i) para las ecuaciones de Laplace.

Las soluciones clásicas de la ecuación de Laplace en un dominio $\Lambda$ son las llamadas funciones armónicas.

**Definición 12.1.1** *Una función* $u : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice* **armónica** *en una región* $\Lambda$ *si* $u$ *tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en* $\Lambda$ *y verifica*

$$\Delta u = 0\,.$$

Estas funciones tienen una propiedad muy útil: bajo condiciones bien generales alcanzan su máximo y su mínimo en la frontera de la región. Más precisamnente:

**Proposición 12.1.2** *( Principio del Máximo) Sea $u$ una función armónica en un dominio bidimensional acotado $\Lambda$ que es continua en $\overline{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$ Entonces $u$ alcanza su valor máximo en $\partial\Lambda$ .*

**Demostración.** Sean

$$\begin{aligned} M &= \text{valor máximo de} \, u \text{ en } \partial\Lambda \quad \text{y} \\ M_0 &= \text{valor máximo de} \, u \text{ en } \overline{\Lambda} . \end{aligned}$$

Si $M_0 > M$ ; es decir, si el valor máximo de $u$ en $\overline{\Lambda}$ no se alcanza en la frontera $\partial\Lambda$ , sea $(x_0, y_0) \in \Lambda$ un punto interior de $\Lambda$ tal que

$$u(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} u(x, y) = M_0 .$$

Sea $R > 0$ tal que $\overline{\Lambda}$ esté contenida en la bola de centro $(x_0, y_0)$ y radio $R$ , y consideremos la función

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M_0 - M}{2\,R^2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] .$$

Por lo tanto, $v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M_0$ , y si $(x, y) \in \partial\Lambda$ , entonces

$$v(x, y) \leq M + \frac{M_0 - M}{2} = \frac{1}{2}(M_0 + M) < M_0 .$$

Esto implica que $v$ también alcanza su valor máximo en un punto interior de $\Lambda$ .

Además,

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 2\,\frac{M_0 - M}{R^2} = 2\,\frac{M_0 - M}{R^2} > 0 .$$

Ahora, como $v$ posee un valor máximo en $\Lambda$ , la correspondiente matriz Hessiana debe ser negativa definida, es decir,

$$v_{xx} < 0 \qquad \text{y}$$

$$\begin{vmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{xy} & v_{yy} \end{vmatrix} > 0 ,$$

Por lo tanto

$$v_{xx} \cdot v_{yy} > 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{yy} < 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{xx} + v_{yy} < 0 ,$$

lo cual es una contradicción. Luego el valor máximo de $u$ tiene que alcanzarse en $\partial\Lambda$ .

**Corolario 12.1.3** *( Principio del Mínimo) Sea $u$ una función armónica en un dominio bidimensional acotado $\Lambda$ que es continua en $\overline{\Lambda}$. Entonces $u$ alcanza su valor mínimo en $\partial\Lambda$.*

**Demostración.** Aplicar la proposición anterior a $-u$.

**Observación 12.1.4** *Estos resultados son válidos para dimensiones mayores.*

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u/_{\partial\Lambda} &= f\,, \end{aligned} \tag{12.1}$$

donde $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado.

**Proposición 12.1.5** *La solución de (12.1), si existe, es única.*

**Demostración.** Sean $u_1, u_2$ soluciones de (12.1). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_2 = 0 \\ u_1/_{\partial\Lambda} &= u_2/_{\partial\Lambda} = f\,. \end{aligned}$$

Ahora como, $u_1$ y $u_2$ son armónicas en $\Lambda$, también $w = u_1 - u_2$ es armónica en $\Lambda$ y $w/_{\partial\Lambda} = 0$. Por lo tanto $w = 0$ en $\Lambda$, ya que $w$ alcanza su máximo y su mínimo en $\partial\Lambda$. Esto implica que $u_1 = u_2$.

**Proposición 12.1.6** *La solución de (12.1), si existe, es estable.*

**Demostración.** Sean $v_1$ y $v_2$ armónicas en $\Lambda$ tales que

$$v_1/_{\partial\Lambda} = f_1 \qquad \text{y} \qquad v_2/_{\partial\Lambda} = f_2\,.$$

Entonces $w = v_1 - v_2$ es armónica y $w/_{\partial\Lambda} = f_1 - f_2$.

Si consideramos la norma del supremo,

$$\| f_1 - f_2 \| = \max_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} | f_1(x,y) - f_2(x,y) |\,,$$

tenemos

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} w(x,y) \leq \|f_1 - f_2\| \quad \text{(Principio del Máximo)}$$

y

$$\min_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} w(x,y) \geq -\|f_1 - f_2\| \quad \text{(Principio del Mínimo)}\,.$$

Por lo tanto

$$| w(x,y) | \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall (x,y) \in \Lambda\,,$$

lo que implica

$$| v_1(x,y) - v_2(x,y) | \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall (x,y) \in \Lambda\,.$$

**Corolario 12.1.7** *Sea* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones armónicas en un dominio acotado* $\Lambda$ *de* $\mathbb{R}^2$ *, que son continuas en* $\overline{\Lambda}$*, y sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tales que:*

$$u_n/_{\partial\Lambda} = f_n\,.$$

*Entonces, si* $f_n \longrightarrow f$ *uniformemente en* $\partial\Lambda$*, tenemos que* $u_n \longrightarrow u$ *uniformemente en* $\overline{\Lambda}$*.*

**Demostración.** Como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $\partial\Lambda$, entonces dado $\epsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, se tiene $\|f_n - f_m\| < \epsilon$.
Por lo tanto, $\forall n, m > N$ tenemos que $\|u_n - u_m\| < \epsilon$, lo cual implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente.

## 12.2 Ecuación de Laplace en el disco

Consideremos el problema

$$\begin{array}{lcll} \Delta u & = & 0\,, & 0 \le r < a\,, \quad 0 \le \theta < 2\pi\,, \\ u(a,\theta) & = & f(\theta)\,, & \\ \lim_{r\to 0}\, u(r,\theta) & < & \infty\,. & \end{array}$$

Para poder usar separación de variables, ocuparemos coordenadas polares. Sea

$$x = r\,\cos(\theta)\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,.$$

Entonces

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x})\,,$$

y tenemos las derivadas

$$\begin{array}{lcl} r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & , & r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ \theta_x = \frac{-y}{x^2+y^2} & , & \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \\ r_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & , & r_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \\ \theta_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & \theta_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,. \end{array}$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= u_{rr}\,(r_x)^2 + 2u_{r\theta}\,r_x\,\theta_x + u_{\theta\theta}\,(\theta_x)^2 + u_r\,r_{xx} + u_\theta\,\theta_{xx} \\
&= u_{rr}\,\frac{x^2}{x^2+y^2} - 2u_{r\theta}\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + u_{\theta\theta}\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \\
&\quad u_r\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + u_\theta\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \\
u_{yy} &= u_{rr}\,(r_y)^2 + 2u_{r\theta}\,r_y\,\theta_y + u_{\theta\theta}\,(\theta_y)^2 + u_r\,r_{yy} + u_\theta\,\theta_{yy} \\
&= u_{rr}\,\frac{y^2}{x^2+y^2} + 2u_{r\theta}\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + u_{\theta\theta}\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \\
&\quad u_r\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - u_\theta\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,,
\end{aligned}
$$

y luego

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= u_{rr} + \frac{1}{x^2+y^2}\,u_{\theta\theta} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,u_r \\
&= u_{rr} + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\,u_r\,.
\end{aligned}
$$

Así el operador Laplaciano en coordenadas polares asume la forma

$$
\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\,.
$$

Además debemos imponer las condiciones de periodicidad:

$$
u(r,0) = u(r,2\pi)\,, \quad u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi)\,.
$$

Así nuestro problema es:

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,; \quad 0 \le r < a\,; \quad 0 < \theta < 2\pi\,, \\
u(a,\theta) &= f(\theta)\,; \quad \lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty\,, \\
u(r,0) &= u(r,2\pi)\,; \quad 0 < r < a\,, \\
u_\theta(r,0) &= u_\theta(r,2\pi)\,; \quad 0 < r < a\,.
\end{aligned}
$$

Sea $u(r,\theta) = M(r)\cdot N(\theta)$. Entonces debemos tener:

$$
\begin{aligned}
r^2M''(r) + rM'(r) + \lambda M(r) &= 0\,, \\
N''(\theta) &= \lambda N(\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Como las condiciones de frontera en la variable $r$ no son homogéneas, utilizamos $N(\theta)$ para definir el problema de autovalores. Se tiene:

$$
\begin{aligned}
u(r,0) &= u(r,2\pi) \implies M(r)\cdot[N(0) - N(2\pi)] = 0 \implies N(0) = N(2\pi)\,, \\
u_\theta(r,0) &= u_\theta(r,2\pi) \implies N'(0) = N'(2\pi)\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $N(\theta)$ debe ser solución de autovalores:

$$\left.\begin{array}{rcl} N''(\theta) &=& \lambda N(\theta)\,, \\ N(0) &=& N(2\pi)\,, \\ N'(0) &=& N'(2\pi)\,, \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son:

$$\left.\begin{array}{rcl} N_0(\theta) &=& 1\,, \\ N_n^{(1)}(\theta) &=& \cos(n\theta)\,, \\ N_n^{(2)}(\theta) &=& \operatorname{sen}(n\theta)\,, \end{array}\right\} \quad \lambda_n = -n^2\,, n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup 0\,.$$

Observe que el autovalor nulo tiene asociada una autofunción, mientras que para los restantes existen dos.

Reemplazando en la ecuación diferencial para $r$, se obtiene:

$$r^2 M_n''(r) + r M_n'(r) - n^2 M_n(r) = 0,\ ,\forall n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{12.2}$$

Para $n = 0$, la solución es

$$M_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r)\,.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, la ecuación (12.2) es una ecuación de Euler cuya solución es:

$$M_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}\,.$$

Entonces, cada uno de los productos:

$$C_0 + D_0 \ln(r)\,, \quad (E_n r^n + F_n r^{-n})\operatorname{sen}(n\theta)\,, \quad (C_n r^n + D_n r^{-n})\cos(n\theta)$$

son soluciones de la E.D.P. que verifica las condiciones de periodicidad.

Como antes, construimos la solución mediante una serie formal:

$$\begin{array}{rcl} u(r,\theta) &=& \dfrac{1}{2} C_0 \ + \ D_0 \ln(r) \ + \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (C_n\, r^n \ + \ D_n\, r^{-n}) \cos(n\theta) \\ && + \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (E_n\, r^n \ + \ F_n\, r^{-n}) \operatorname{sen}(n\theta)\,, \end{array}$$

donde las constantes arbitrarias $C_n, D_n, E_n, F_n$ se determinan de las condiciones de frontera:

$$\lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} D_0 = & 0 & \\ D_n = & 0\,, & n \in \mathbb{N}, \\ F_n = & 0\,, & n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n a^n \operatorname{sen}(n\theta)$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds \\
C_n &= \tfrac{a^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds \;=\; a^{-n}c_n \\
E_n &= \tfrac{a^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{sen}(ns)ds \;=\; a^{-n}d_n
\end{aligned}
$$

Se obtiene finalmente:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left[c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta)\right]. \tag{12.3}$$

## 12.3 Convergencia de la Serie de Fourier: Núcleo de Poisson

Supongamos $f(\theta)$ continua en $[0,2\pi]$. Si $\mid f(\theta) \mid \leq \frac{k}{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mid C_0 \mid &= \mid \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds \mid < k, \quad \text{y} \\
\mid c_n \mid &= \mid \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds \mid < k,\ \forall n\in\mathbb{N} \\
\mid d_n \mid &= \mid \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{sen}(ns)ds \mid < k,\ \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Consideremos entomces la sucesión de funciones $(u_n(r,\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por:

$$u_0 = \frac{C_0}{2}, \qquad u_n(r,\theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^n (c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Entonces para todo $n\in\mathbb{N}^*$ se tiene

$$\mid u_n(r,\theta)\mid < 2\,k\,{\rho_0}^n \quad \text{para} \quad 0 \leq \frac{r}{a} \leq \rho_0 < 1.$$

Luego, por el Criterio de Convergencia de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta)$$

converge unifirmemente y absolutamente en cualquier disco cerrado contenido en el disco abierto de radio $a$. Por lo tanto, $u(r,\theta)$ definida como en (12.3), está bien definida.

Por otra parte para todo $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial r}\right| \;=\; \left|\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta))\right| \;<\; 2\,k\,\frac{n}{a}\,\rho_0^{n-1}.$$

Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial r}(r,\theta)$$

converge absolutamente y uniformemente en todo disco cerrado contenido en el disco abierto de radio $a$.

Lo mismo sucede con las series que se obtienen derivando dos veces, término a término, con respecto a $r$ y $\theta$, respectivamente.

Luego, como cada $u_n(r,\theta)$ es armónica, tenemos que $u(r,\theta)$ definida como en (12.3), es armónica en todo punto interior del disco de radio $a$.

Reemplazando los valores de $C_0, c_n, d_n$ en (12.3) tenemos

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\cos(n\theta)\\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{sen}(ns)ds\right)\mathrm{sen}(n\theta)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds\\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi} f(s)[\cos(ns)\ cos(n\theta) + \mathrm{sen}(ns)\mathrm{sen}(n\theta)]ds\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(n(\theta - s))\right] f(s)ds
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
1\ +\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(n(\theta-s)) &= 1\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(e^{n(\theta-s)\imath} + e^{-n(\theta-s)\imath}\right)\\
&= 1\ +\ \frac{\frac{r}{a}e^{(\theta-s)\imath}}{1-\frac{r}{a}e^{(\theta-s)\imath}}\ +\ \frac{\frac{r}{a}e^{-(\theta-s)\imath}}{1-\frac{r}{a}e^{-(\theta-s)\imath}}\\
&= \frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}f(s)ds.$$

**Observación 12.3.1**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}ds\ =\ 1.$$

En efecto, si $f(\theta)\equiv 1$, los coeficientes de Fourier son $c_0 = 2$, $c_n = d_n = 0$, lo que implica que $u(r,\theta)\equiv 1$, para $0 < r < a$. Entonces

$$u(r,\theta) - f(\theta)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}\left(f(s)-f(\theta)\right)ds.$$

Como $f$ es continua en $[0, 2\pi]$, lo es uniformemente. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\theta - s\| < \delta \implies \|f(\theta) - f(s)\| < \epsilon .$$

Por otra parte, si $\|\theta - s\| \geq \delta$, se tiene

$$\lim_{r \to a} \frac{(a^2 - r^2)}{(a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2)} = 0 .$$

Por lo tanto, existe $r_0$ tal que, si $0 \leq r_0 \leq r < a$ y $\|\theta - s\| \geq \delta$, entonces

$$\frac{(a^2 - r^2)}{(a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2)} < \epsilon .$$

Luego para $0 \leq r_0 \leq r < a$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mid u(r,\theta) - f(\theta) \mid \;&\leq\; \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - s| \geq \delta} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} \mid f(\theta) - f(s) \mid ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - s| < \delta} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} \mid f(\theta) - f(s) \mid ds \\
&\leq\; \frac{1}{2\pi} [2\pi\varepsilon \max_{\theta \in [0,2\pi]} \mid f(\theta) \mid] + \varepsilon \\
&=\; \varepsilon\, [1 + 2 \max_{\theta \in [0,2\pi]} \mid f(\theta) \mid] .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{r \to a} u(r,\theta) = f(\theta) .$$

Así hemos demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 12.3.2** *Si $f$ es continua en $[0, 2\pi]$, existe una única función armónica $u(r,\theta)$ que verifica $u(a,\theta) = f(\theta)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Esta función es:*

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} f(s)\, ds \;=\; (P_r * f)(\theta) ,$$

*donde*

$$P_r(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta) + r^2} \qquad (\textit{núcleo de Poisson})$$

**Ejemplo 12.3.3** Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}
\Delta u \;&=\; 0 ; \quad 0 < r < 1 ; \quad 0 < \theta < 2\pi \\
u(1,\theta) \;&=\; \theta , \quad \lim_{r \to 0} u(r,\theta) < \infty .
\end{aligned}$$

**Solución.** Entonces nuestra solución es de la forma (12.3) con

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s\,ds = 2\pi\,, \\ c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s\cos(ns)\,ds = 0 \\ d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s\mathrm{sen}(ns)\,ds = -\frac{2}{n}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\,\mathrm{sen}(n\theta)\,.$$

**Ejemplo 12.3.4** Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,; \quad 0 < r < 1\,; \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) &= sen^3(\theta)\,, \quad \lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty\,. \end{aligned}$$

**Solución.** Como

$$\mathrm{sen}^3(\theta) = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(3\theta)\,,$$

comparando con (12.3) tenemos

$$C_0 = 0\,; \quad c_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

y

$$d_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{1,3\}\,, \quad d_1 = \frac{3}{4}\,; \quad d_3 = -\frac{1}{4}\,\cdot$$

Por lo tanto,

$$u(r,\theta) = \frac{3}{4}\,r\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{1}{4}\,r^3\,\mathrm{sen}(3\theta)\,.$$

**Ejemplo 12.3.5** Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,; \quad 1 < r < 3\,; \quad 0 \le \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) &= 0\,, \\ u(3,\theta) &= \cos(3\theta) + sen(5\theta)\,. \end{aligned}$$

**Solución.** Nuestra solución formal es

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2}\,C_0 + D_0\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\,r^n + D_n\,r^{-n})\,\cos(n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n\,r^n + F_n\,r^{-n})\,\mathrm{sen}(n\theta)\,. \end{aligned}$$

Para calcular el valor de las constantes imponenmos las condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} 0 \;=\; u(1,\theta) \;&=\; \frac{1}{2}C_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \;+\; D_n)\cos(n\theta) \\ &+\; \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \;+\; F_n)\operatorname{sen}(n\theta)\,, \end{aligned}$$

implica

$$C_0 \;=\; 0\,, \quad D_n \;=\; -C_n\,, \quad F_n \;=\; -E_n\,, \quad \forall n \geq 1\,.$$

Además

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + \operatorname{sen}(5\theta) \;=\; u(3,\theta) \;&=\; D_0\ln(3) \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(3^n \;-\; 3^{-n})\,C_n\,\cos(n\theta) \\ &+\; \sum_{n=1}^{\infty}(3^n \;+\; 3^{-n})\,E_n\operatorname{sen}(n\theta)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 \;=\; 0\,, \qquad C_3 \;&=\; \frac{1}{3^3 - 3^{-3}}\,, \quad C_n \;=\; 0\,, \quad \forall n \neq 3\,, \\ E_5 \;&=\; \frac{1}{3^5 - 3^{-5}}\,, \quad E_n \;=\; 0\,, \quad \forall n \neq 5\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{1}{3^3 - 3^{-3}}\,(r^3 \;-\; r^{-3})\,\cos(3\theta) \;+\; \frac{1}{3^5 - 3^{-5}}\,(r^5 \;-\; r^{-5})\operatorname{sen}(5\theta)\,.$$

## 12.4 Ecuación de Laplace en un Rectángulo

$$\begin{aligned} \Delta u \;&=\; 0\,; 0 < x < a\,; 0 < y < b \\ u(0,y) \;&=\; f_1(y)\,; u(a,y) = f_2(y)\,; 0 < y < b \\ u(x,0) \;&=\; f_3(x)\,; u(x,b) = f_4(x)\,; 0 < x < a\,. \end{aligned}$$

Como en este problema ninguna de las condiciones de frontera es homogénea, descomponemos en los siguientes dos problemas.

1. Condiciones de frontera homog'eneas en la variable $x$.

$$\begin{aligned} \Delta u^I \;&=\; 0\,; 0 < x < a\,; 0 < y < b \\ u^I(0,y) \;&=\; 0 = u^I(a,y)\,; 0 < y < b \\ u^I(x,0) \;&=\; f_3(x)\,; u^I(x,b) = f_4(x)\,; 0 < x < a\,. \end{aligned}$$

2. Condiciones de frontera homog'eneas en la variable $y$.

$$
\begin{aligned}
\Delta u^{II} &= 0\,;0<x<a\,;0<y<b\\
u^{II}(0,y) &= f_1(y)\,;u^{II}(a,y)=f_2(y)\,;0<y<b\\
u^{II}(x,0) &= 0=u^{II}(x,b)\,;0<x<a\,.
\end{aligned}
$$

Cada uno se resuelve mediante separación de variables y, obtenida la solución en ambos casos, la suma será solución de nuestro problema.

**Problema 1** $u^I(x,y)=M(x)\cdot N(y)$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
M''(x) &= -\lambda M(x)\\
N''(y)-\lambda N(y) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Imponiendo las condiciones de frontera para $x$, obtenemos el problema regular de Sturm-Liouville

$$
\left\{\begin{array}{rcccc} M''(x) &=& -\lambda M(x) && \\ M(0) &=& M(a) &=& 0\,. \end{array}\right.
$$

Por lo tanto,

$$M_n(x)=\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}x)\,;\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\,,\mathrm{con} n\in\mathbb{N}\,.$$

Sustituyendo,

$$N_n''(y)-(\frac{n^2\pi^2}{a^2})\cdot N_n(y0=0$$

cuyas soluciones son:

$$N_n(y)=C_n\cosh(\frac{n\pi}{a}y)+D_n\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}y)\,.$$

entonces los productos $u_n(x,y)=M_n(x)N_n(y)\mathrm{con} n\in\mathbb{N}$, son soluciones de la E.D.P. que verifica las condiciones de contorno en $x$.

Ponemos como siempre

$$u^I(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_n\cosh(\frac{n\pi}{a}y)+D_n\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}y)\Big)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}x)\,.$$

Para determinar $C_n \mathrm{y} D_n$, $\mathrm{con} n\in\mathbb{N}$, imponemos las condiciones de contorno en $y$.

$$u^I(x,0)=f_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}x)$$

$$\Longrightarrow C_n=\frac{2}{a}\int_0^a f_3(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds=a_n^{(1)}$$

$$u^I(x,b) = f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cosh(\frac{n\pi b}{a}) + D_n \mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a}) \right) \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}\,x)$$

Luego,

$$\begin{aligned} C_n \cosh(\frac{n\pi b}{a}) + D_n \mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a}) &= \frac{2}{a}\int_0^a f_4(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds \\ &= a_n^{(2)} \end{aligned}$$

De donde,

$$D_n = \frac{a_n^{(2)} - a_n^{(1)} \cosh(\frac{n\pi b}{a})}{\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\,.$$

Así tenemos que,

$$u^I(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n^{(1)} \cosh(\frac{n\pi y}{a}) + \frac{a_n^{(2)} - a_n^{(1)} \cosh(\frac{n\pi b}{a})}{\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})} \right] \cdot \mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{a})\,,$$

donde

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= \frac{2}{a}\int_0^a f_3(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds \\ a_n^{(2)} &= \frac{2}{a}\int_0^a f_4(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds\,. \end{aligned}$$

**Observación 12.4.1** El problema 2 se resuelve de manera similar.

## 12.5 Ejercicios resueltos

**Ejercicio 12.5.1** Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,; \quad 0 < r < 1\,; \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) &= \theta(\theta - 2\pi)\,, \quad \lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty\,. \end{aligned}$$

**Solución.** Nuestra solución es de la forma

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}\,C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[ c_n \cos(n\theta) + d_n \mathrm{sen}(n\theta) \right],$$

con

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(s-2\pi)\,ds \;=\; \frac{8}{3}\pi^2 - 4\pi\,,\\
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(s-2\pi)\cos(ns)\,ds\\
&= \frac{1}{\pi}\left[s(s-2\pi)\,\frac{\operatorname{sen}(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;-\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} 2(s-\pi)\operatorname{sen}(ns)\,ds\right]\\
&= -\frac{2}{n\,\pi}\left[-(s-\pi)\,\frac{\cos(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;+\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(ns)\,ds\right]\\
&= \frac{2}{n^2\,\pi}\left[\pi+\pi+\frac{1\operatorname{sen}(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi}\right] \;=\; \frac{4}{n^2}\\
d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(s-2\pi)\operatorname{sen}(ns)\,ds\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-s(s-2\pi)\,\frac{\cos(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;+\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} 2(s-\pi)\,\cos(ns)\,ds\right]\\
&= \frac{2}{n\,\pi}\left[(s-\pi)\,\frac{\operatorname{sen}(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;-\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(ns)\,ds\right] \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{4}{3}\pi^2 - 2\pi \;+\; 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^2}\cos(n\theta)\,.$$

**Ejercicio 12.5.2** Resuelva la ecuación de Laplace

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,; \quad 0 < r < a\,; \quad 0 \le \theta < \tfrac{\pi}{2}\\
u(a,\theta) &= sen(\theta)\,\cos(\theta)\,,\\
u(r,0) &= u(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.
\end{aligned}
$$

**Solución.** Nuestra solución formal es

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) \;=\; &\frac{1}{2}C_0 \;+\; D_0\ln(r) \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\,r^n \;+\; D_n\,r^{-n})\,\cos(n\theta)\\
&+\;\sum_{n=1}^{\infty}(E_n\,r^n \;+\; F_n\,r^{-n})\operatorname{sen}(n\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Para que la solución sea acotada cuando $r \to 0$ debemos tener

$$D_0 \;=\; 0 \quad \text{y} \quad D_n \;=\; F_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \ge 1\,.$$

Luego

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{1}{2}C_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[C_n\,\cos(n\theta) \;+\; E_n\operatorname{sen}(n\theta)\right].$$

Pero

$$0 \;=\; u(r,0) \;=\; \frac{1}{2}C_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, C_n \quad\Longrightarrow\quad C_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \geq 0\,,$$

y

$$0 \;=\; u(r,\frac{\pi}{2}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1}\, E_{2n+1}(-1)^n \quad\Longrightarrow\quad E_{2n+1} \;=\; 0 \quad \forall\, n \geq 0\,.$$

Entonces

$$u(r,\theta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}\, E_{2n}\,\mathrm{sen}(2n\theta)\,.$$

Finalmente

$$\mathrm{sen}(\theta)\,\cos(\theta) \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta) \;=\; u(a,\theta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n}\, E_{2n}\,\mathrm{sen}(2n\theta)\,,$$

implica

$$E_2 \;=\; \frac{1}{2a^2} \quad \text{y} \quad E_{2n} \;=\; 0 \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Por lo tanto nuestra solución es

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{a^2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\,.$$

**Ejercicio 12.5.3** Resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < y < \pi$$

bajo las condiciones

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u(x,\pi) = 0\,, u(x,0) = x\,.$$

**Solución.** Poniendo $u(x,y) = M(x)N(y)$, y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} M''(x) + \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M'(0) = M'(\pi) = 0 \end{array} \right. \qquad N''(y) - \lambda N(y) \;=\; 0\,.$$

Los correspondientes autovalores y autofunciones son entonces respectivamente $\lambda_n = n^2$ y $M_n(x) = \cos(nx)$, $n \geq 1$.

De esta forma la ecuación en $y$ queda de la forma

$$N_n''(y) - n^2 N_n(y) = 0\,, \quad n \geq 1$$

cuya solución general es

$$N_n(x) = a_n \cosh(ny) + b_n \mathrm{senh}(ny)\,.$$

Luego nuestra solución formal es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cosh(ny) + b_n \operatorname{senh}(ny)] \cos(nx) .$$

Imponiendo las condiciones iniciales $u(x,0) = x$ y $u(x,\pi) = 0$, tenemos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

y

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cosh(n\pi) + b_n \operatorname{senh}(n\pi)] \cos(nx) .$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)$$

y

$$b_n = -a_n \cdot \frac{\cosh(n\pi)}{\operatorname{senh}(n\pi)} .$$

De esta forma

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)[\cosh(ny) - \frac{\cosh(n\pi)}{\operatorname{senh}(n\pi)}\operatorname{senh}(ny)] \cos(nx) ,$$

o bien

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)\,\frac{\operatorname{senh}(n(\pi - y))}{\operatorname{senh}(n\pi)}\,\cos(nx) .$$

**Ejercicio 12.5.4** Encuentre la solución de la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}
&\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,\\
&u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1,\\
&u(x,0) = \cos(x) - \cos(3x), \quad 0 \le x \le \pi,\\
&u(x,1) = \cos(2x), \quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

**Solución.** Como tenemos las mismas condiciones de frontera homogénea en la variable $x$, tenemos la solución formal

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cosh(ny) + b_n \operatorname{senh}(ny)] \cos(nx) .$$

Entonces

$$\cos(x) - \cos(3x) \;=\; u(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,,$$

implica

$$a_1 \;=\; 1\,,\; a_3 \;=\; -1 \quad \text{y} \quad a_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} - \{1,3\}\,.$$

Además

$$\begin{aligned}
\cos(2x) \;=\; u(x,1) \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(n) + b_n \operatorname{senh}(n)] \cos(nx) \\
&=\; [\cosh(1) + b_1 \operatorname{senh}(1)] \cos(x) \;+\; b_2 \operatorname{senh}(2) \cos(2x) \\
&\quad + [-\cosh(3) + b_3 \operatorname{senh}(3)] \cos(3x) \;+\; \sum_{n=4}^{\infty} b_n \operatorname{senh}(n) \cos(nx)\,,
\end{aligned}$$

implica

$$b_1 \;=\; -\frac{\cosh(1)}{\operatorname{senh}(1)}\,, \quad b_2 \;=\; -\frac{1}{\operatorname{senh}(2)}\,, \quad b_3 \;=\; \frac{\cosh(3)}{\operatorname{senh}(3)} \quad \text{y} \quad b_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.$$

Luego nuestra solución es

$$\begin{aligned}
u(x,y) \;&=\; [\cosh(y) - \frac{\cosh(1)}{\operatorname{senh}(1)} \operatorname{senh}(y)] \cos(x) \;-\; \frac{1}{\operatorname{senh}(2)} \operatorname{senh}(2y) \cos(2x) \\
&\quad + [-\cosh(3y) + \frac{\cosh(3)}{\operatorname{senh}(3)} \operatorname{senh}(3y)] \cos(3x)\,.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 12.5.5** Encuentre la solución de la ecuación de Laplace correspondiente a una región exterior

$$\begin{array}{lcl}
\Delta u & = & 0\,, \qquad\qquad r > 1\,, \quad 0 < \theta < 2\pi \\
u(r,0) & = & u(r,2\boldsymbol{\pi})\,, \quad u_\theta(r,0) \;=\; u_\theta(r,2\pi)\,, \quad r > 1 \\
u_r(1,\theta) & = & \cos^4(\theta) \;-\; \frac{3}{8}\,, \quad 0 < \theta < 2\pi \\
u(r,\theta) & & \textit{permanece acotada cuando} \quad r \to \infty
\end{array}$$

**Solución.** Poniendo $u(r,\theta) \;=\; M(r) \cdot N(\theta)$ y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$r^2 M''(r) \;+\; r M'(r) \;+\; \lambda M(r) \;=\; 0 \qquad \left\{ \begin{array}{c} N''(\theta) - \lambda N(\theta) \;=\; 0 \\ N(0) \;=\; N(2\pi)\,, \quad N'(0) \;=\; N'(2\pi) \end{array} \right.$$

Por lo tanto las autofunciones y autovalores son, respectivamente

$$\left. \begin{array}{lcl} N_0(\theta) & = & 1 \\ N_n^{(1)}(\theta) & = & \cos(n\theta) \\ N_n^{(2)}(\theta) & = & \operatorname{sen}(n\theta) \end{array} \right\} \quad \lambda_n \;=\; -n^2\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Reemplazando el valor de $\lambda = \lambda_n$ en la ecuación en $r$ obtenemos

$$r^2 M_n''(r) \ + \ rM_n'(r) \ - \ n^2 M_n(r) \ = \ 0$$

cuya solución general es

$$\begin{aligned} M_0(r) &= C_0 \ + \ D_0 \ln(r)\,, \quad \text{para} \quad n = 0\,, \quad \text{y} \\ M_n(r) &= C_n r^n \ + \ D_n r^{-n}\,, \quad \text{para} \quad n \geq 1\,. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos la solución formal

$$\begin{aligned} u(r,\theta) \ = \ & \frac{1}{2}(C_0 \ + \ D_0 \ln(r)) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n \ + \ D_n r^{-n}) \cos(n\theta) \ + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}(E_n r^n \ + \ F_n r^{-n}) \operatorname{sen}(n\theta)\,. \end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} u(r,\theta) \ < \ \infty \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} D_0 & = & 0\,, & \\ C_n & = & 0\,, & n \geq 1\,, \\ E_n & = & 0\,, & n \geq 1\,. \end{array} \right.$$

Luego

$$u(r,\theta) \ = \ \frac{C_0}{2} \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-n} \cos(n\theta) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} F_n r^{-n} \operatorname{sen}(n\theta) \qquad \text{y}$$

$$u_r(r,\theta) \ = \ -\sum_{n=1}^{\infty} n D_n r^{-n-1} \cos(n\theta) \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} n F_n r^{-n-1} \operatorname{sen}(n\theta)\,.$$

Luego debemos tener

$$\cos^4(\theta) \ - \ \frac{3}{8} \ = \ -\sum_{n=1}^{\infty} n D_n \cos(n\theta) \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} n F_n \operatorname{sen}(n\theta)\,.$$

Pero

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) - \frac{3}{8} &= \frac{1}{4}(1+\cos(2\theta))^2 - \frac{3}{8} \ = \ \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)) - \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}(1+\cos(4\theta)) - \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta)\,. \end{aligned}$$

Luego

$$D_1 \ = \ 0\,, \quad -2D_2 \ = \ \frac{1}{2}\,, \quad D_3 \ = \ 0\,, \quad -4D_4 \ = \ \frac{1}{8}\,, \quad D_n \ = \ 0\,, \quad n \geq 5\,,$$

y

$$F_n \;=\; 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Entonces nuestra solución es

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{1}{2}C_0 - \frac{1}{4}r^{-2}\cos(2\theta) - \frac{1}{32}r^{-4}\cos(4\theta)\,.$$

**Ejercicio 12.5.6** Sea $A$ una constante. Resolver la ecuación de Laplace

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi\,,\; 0 < y < 1 \\ u(x,0) = Ax,\;\; u(x,1) = A & 0 < x < \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = Ay & 0 < y < 1\,. \end{array}$$

**Solución.** Para obtener condiciones de frontera homogénea en $x$, hacemos un cambio de función de la forma

$$u(x,y) \;=\; Mx \;+\; Ny \;+\; v(x,y)\,.$$

Entonces

$$Ay \;=\; u(0,y) \;=\; Ny \;+\; v(0,y) \quad\Longrightarrow\quad N \;=\; A\,,$$

y

$$Ay \;=\; u(\pi,y) \;=\; M\pi \;+\; Ay \;+\; v(\pi,y) \quad\Longrightarrow\quad M \;=\; 0\,.$$

Así el cambio de función es

$$u(x,y) \;=\; Ay \;+\; v(x,y)\,.$$

Además

$$v(x,0) \;=\; u(x,0) \;=\; A\,x\,,$$

y

$$v(x,1) \;=\; u(x,1) - \;A = \;0\,.$$

Luego nuestro problema es

$$\begin{array}{ll} v_{xx} + v_{yy} = 0 & 0 < x < \pi\,,\; 0 < y < 1 \\ v(x,0) = A\,x\,,\; v(x,1) = 0 & 0 < x < \pi \\ v(0,y) = v(\pi,y) = 0 & 0 < y < 1\,. \end{array}$$

Poniendo $v(x,y) = M(x)N(y)$, y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M''(x) + \lambda M(x) &=& 0 \\ M(0) = M(\pi) = 0 && \end{array} \right. \qquad N''(y) - \lambda N(y) \;=\; 0\,.$$

Los correspondientes autovalores y autofunciones son entonces respectivamente $\lambda_n = n^2$ y $M_n(x) = \text{sen}(nx)$, $n \geq 1$.

De esta forma la ecuación en $y$ queda de la forma

$$N_n''(y) - n^2 N_n(y) = 0\,, \quad n \geq 1$$

cuya solución general es

$$N_n(x) = a_n \cosh(ny) + b_n \mathrm{senh}(ny)\,.$$

Luego nuestra solución formal es

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(ny) + b_n \mathrm{senh}(ny)] \mathrm{sen}(nx)\,.$$

La condición

$$A\,x \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sen}(nx)\,,$$

implica

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{A}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos(nx)}{n}\Big/_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right] \\ &= -\frac{A}{n}(-1)^n\,. \end{aligned}$$

La otra condición

$$0 \;=\; v(x,1) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(n) + b_n \mathrm{senh}(n)] \mathrm{sen}(nx)\,,$$

implica

$$b_n \;=\; -a_n \cdot \frac{\cosh(n)}{\mathrm{senh}(n)} \;=\; \frac{A}{n}(-1)^n \cdot \frac{\cosh(n)}{\mathrm{senh}(n)}\,.$$

De esta forma

$$u(x,y) \;=\; -A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left[\cosh(ny) - \frac{\cosh(n)}{\mathrm{senh}(n)}\mathrm{senh}(ny)\right]\mathrm{sen}(nx)\,,$$

o bien

$$u(x,y) \;=\; -A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{\mathrm{senh}(n(1-y))}{\mathrm{senh}(n)}\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$